

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Wintersemester 2010/2011

Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten

Prof. Brüning

Bodo Graumann

19. Mai 2014

 Diese Dokument wurde auf <http://bodograumann.de> veröffentlicht. Es steht unter der [Attribution-ShareAlike 3.0 Unported \(CC BY-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) Lizenz.

 Der Code wurde mit [gvim](https://www.gnu.org/software/gvim/) sowie [vim-latex](https://www.ctan.org/pkg/vim-latex) erstellt und mit [xelatex](https://www.xelatex.org/) kompiliert – all das auf [Gentoo Linux](https://www.gentoo.org/). Meinen Dank an die Freie Software Community und die [TeX-Kollegen auf TeX.SX](https://www.tex.sx/) für ihre Hinweise und Unterstützung.

Bitte schreibt mir eure Kommentare und Verbesserungsvorschläge zu diesem Dokument! Ihr könnt mir entweder direkt mailen oder das Kontaktformular auf meiner Internetseite benutzen.

Inhaltsverzeichnis

1	Rückblick über bekannte Strukturen	3
1.1	Mengenlehre	3
1.2	G-Mengen	4
1.3	Topologische Räume	5
1.3.1	Kompaktheit	10
1.4	Lineare Algebra	11
1.4.1	Hierarchie algebraischer Strukturen	11
1.4.2	Definitionen	12
1.4.3	Kern, Bild, Kokern	13
1.4.4	Komplexe	13
1.5	Duale Vektorräume	14
1.6	Die Sprache der Kategorien	14
2	Mannigfaltigkeiten	15
2.1	Differenzierbare Abbildungen	15
2.2	Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	17
2.2.1	Lokale Struktur von differenzierbaren Abbildungen	21
2.3	Mannigfaltigkeiten	27
2.3.1	Differenzierbare Abbildungen	35
2.3.2	Eingebettete Untermannigfaltigkeiten	39
2.3.3	Niveaumengen	39
3	Vektorfelder	40
3.1	Algebraische Eigenschaften	40
3.2	Integralkurven	42
3.3	Lie-Gruppen	45
4	Tensoren und Differentialformen	52
4.1	Das Tensorkalkül	52
4.2	Tensorfelder und Differentialformen	55
4.3	Die Lie-Ableitung	56
4.4	Integration	58
5	de Rham und Hodge Theorie	69
	Literatur	75
	Index	76

1 Rückblick über bekannte Strukturen

1.1 Mengenlehre

1. \mathbb{R} ist ein Körper mit den Operationen $+$ (abelsche Gruppe mit neutralem Element 0) und \cdot (damit wird $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ abelsche Gruppe mit neutralem Element 1).
2. Es gibt eine totale Ordnung $<$, das heißt $\forall a, b \in \mathbb{R}: a < b \vee b < a \vee a = b$. Dabei gelten gewisse Kompatibilitätsregelungen mit den Körperoperationen.
3. \mathbb{R} ist vollständig, das heißt, ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so gibt es auch eine kleinste obere Schranke.

Mengen werden in der Regel mit den großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \dots, X, Y, Z \subset \tilde{X}$ bezeichnet. Dann ist \tilde{X} selber keine Menge. Es gibt auf den Mengen die Operationen $A \cup B$, $A \cap B$ und $\bigcup_{a \in A} A_a$ sowie $A \setminus B$.

Weiterhin gibt es Abbildungen $f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$, deren Gesamtheit mit $\text{Map}(A, B)$ oder B^A bezeichnet wird. Sie können als Teilmenge von $A \times B$ formalisiert werden, welches die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A, b \in B$ ist und als $\{a, \{a, b\}\}$ in der Mengenlehre formalisiert werden kann. Eine Abbildung heißt *injektiv*, wenn keine zwei Werte aus A das gleiche Bild in B haben, *surjektiv*, wenn das Bild B überdeckt und *bijektiv* wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Das *Urbild* von einem $y \in B$ unter f ist definiert als $f^{-1}(y) := \{x \in A \mid f(x) = y\}$ und wird auch als *Faser* von f über y bezeichnet. Ist f bijektiv, so ist es auch f^{-1} . Außerdem ist die Verknüpfung zweier bijektiver Abbildungen wieder bijektiv und ebenso die identische Abbildung.

Nun kann man die Äquivalenzrelation $A \sim B := \exists f: A \rightarrow B$, bijektiv betrachten. Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen Kardinalzahlen und charakterisieren die „Größe“ der Mengen.

Betrachtet man das *kartesische Produkt* $A \times B$, so gibt es die kanonischen Projektionen $\pi_A: A \times B \rightarrow A, (a, b) \mapsto a, \pi_B: A \times B \rightarrow B, (a, b) \mapsto b$. Ist nun eine Teilmenge $R \subset A \times B$ gegeben mit $\pi_A: R \rightarrow A$ bijektiv, so heißt R *Graph* der Funktion f mit $f(a) = \pi_B(\pi_A^{-1}|_R(a))$.

Relationen auf A Relationen $<$ auf A sind Teilmengen von $R \subset A \times A$. Wir schreiben $(a, b) \in R \Leftrightarrow a < b$.

1. Eine Relation heißt *Vorordnung*, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

$$\text{Reflexivität: } \forall a \in A: a < a$$

$$\text{Transitivität: } \forall a, b, c \in A: a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

Zum Beispiel (\mathbb{R}, \leq) .

2. Eine *Halbordnung* ist eine Vorordnung mit

$$\text{Antisymmetrie: } \forall a, b \in A: a < b \wedge b < a \Rightarrow a = b$$

Eine *Kette* ist eine Menge auf der $<$ eine Totalordnung induziert. Eine *obere Schranke* einer Kette C ist ein $a \in A$ mit $\forall c \in C: c < a$.

3. Eine totalgeordnete Menge $(A, <)$ heißt *wohlgeordnet*, wenn jede Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

1 Satz: Wohlordnungssatz

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Das Auswahlaxiom: Für jede Familie von Menge gibt es eine Menge, die aus jeder Menge der Familie genau ein Element enthält.
2. Das Zornsche Lemma: Wenn in der halbgeordneten Menge $(A, <)$ jede Kette eine obere Schranke besitzt, dann besitzt A ein Maximum.
3. Der Satz von Zermelo: Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

Wenden wir das Auswahlaxiom auf eine surjektive Abbildung an $f: A \rightarrow B$, erhalten wir zu jeder Faser einen Funktionswert einer Funktion $s: B \rightarrow A$ mit $f \circ s = \text{id}_B$. Dann ist s ein *Schnitt* von f .

1.2 G-Mengen

Sei G eine beliebige Gruppe und A eine Menge. Dann ist $\psi: G \times A \rightarrow A, (g, a) \mapsto \psi(g, a) = \psi_g(a) \in A$ eine Gruppenwirkung oder -aktion von links, wenn gilt:

1. $\psi_{g_1} \circ \psi_{g_2} = \psi_{g_1 g_2}$
2. $\psi_e = \text{id}_A$ wobei e das neutrale Element von G ist.

Dabei sind die ψ_g Automorphismen.

Fordert man statt dem ersten Axiom $\psi_{g_1} \circ \psi_{g_2} = \psi_{g_2 g_1}$ so erhält man eine Gruppenwirkung von rechts. Der *Orbit* von $a \in A$ unter G ist $Ga := \{ ga \mid g \in G \}$. Die Abbildung $\psi^a: g \mapsto ga$ hat das Bild Ga , also ist $\psi^a|_{Ga}$ surjektiv aber in der Regel nicht injektiv. Was fehlt dazu also? Das sind die Isotropiegruppen $G_a := \{ g \in G \mid g \circ a = a \}$ (auch Stabilisator, Fixgruppe oder Standuntergruppe). Den Raum der Orbits bezeichnen wir als $A/G := \{ Ga \mid a \in A \}$ und es gibt eine Abbildung $\pi_G: A \rightarrow A/G, a \mapsto Ga$.

Angenommen wir haben zwei G -Räume A und B sowie eine Abbildung $f: A \rightarrow B$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \pi_G^A & & \downarrow \pi_G^B \\ A/G & \xrightarrow{f_G} & B/G \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert wenn gilt

$$f(ga) = gf(a)$$

In diesem Fall nennen wir f *G-äquivariant*.

Typen einfacher G-Wirkungen Eine G-Wirkung wird als *frei* bezeichnet, wenn der Stabilisator trivial ist

$$\forall a \in A: G_a = \{e\}$$

Die Wirkung ist also frei von Fixpunkten. Das heißt die Orbits einer freien G-Wirkung sind gleichmächtig zu G, $Ga \sim G$. Außerdem erhalten wir

$$(G \times A/G) \sim A$$

Das heißt A wird durch die Wirkung von G in die Orbits mit G-Struktur zerlegt. Dann wählen wir aus jedem Orbit einen Repräsentant $s(Ga)$ um eine solche Bijektion zu finden: $f: (g, Ga) \mapsto gs(Ga)$. Damit erhalten wir schließlich wieder die Abbildung, die jedes Element von A auf ihren Orbit abbildet $\pi_G: A \rightarrow A/G, a \mapsto \pi_2(f^{-1}(a))$. Wir sprechen hier von einer *grundlegenden Faserung*.

Kartesisches Produkt von G-Räumen Seien A_1, A_2 G-Räume, dann ist $A_1 \times A_2$ ein kanonischer G-Raum mit

$$g(a_1, a_2) = (ga_1, ga_2) =: (a_1g^{-1}, ga_2)$$

Weiterhin sei A_1 frei, dann ist $A_1 \times A_2$ auch frei(!).

1.3 Topologische Räume

Wir haben eine Menge X gegeben und betrachten eine gewisse Menge von Teilmengen $\mathcal{T} \subset \wp(X)$, die wir *offen* nennen. Dabei verlangen wir:

$$\emptyset, X \in \mathcal{T} \tag{1-1}$$

$$\forall (U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}: \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T} \tag{1-2}$$

$$\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}: U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T} \tag{1-3}$$

Extremfälle Es gibt immer die *Klumpentopologie* $\{\emptyset, U\}$ und die diskrete Topologie $\wp(U)$. Alle Topologien über einer Menge X können mittels der Mengeninklusion halbgeordnet werden. Wir sprechen dann von *feineren* und *gröberen* Topologien. (Für $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ heißt \mathcal{T}_2 ist feiner)

Begriffe Sei \mathcal{T} eine Topologie auf X. Dann heißen die Mengen $U \in \mathcal{T}$ *offen* und deren Komplemente *abgeschlossen*. Liegt ein Punkt $x \in X$ in einer offenen Menge U, so heißt U *Umgebung* von x.

Für eine Familie von Topologien $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ können wir die *Schnitttopologie* definieren:

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i = \{u \subset X \mid \forall i \in I: u \in \mathcal{T}_i\}$$

Für eine Menge $\mathcal{A} \subset \wp(X)$, welche selbst keine Topologie sein muss, gibt es eine größte Topologie, die \mathcal{A} enthält:

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\text{Topologie } \mathcal{T} \supset \mathcal{A}} \mathcal{T}$$

Dann nennen wir \mathcal{A} eine *Unterbasis* von $\mathcal{T}(\mathcal{A})$. Wenn $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ sich bereits aus allen Vereinigungen aus Mengen in \mathcal{A} ergibt, so nennen wir \mathcal{A} eine *Basis* von $\mathcal{T}(\mathcal{A})$.

2 Definition: „Stetigkeit“

Für zwei topologische Räume X, Y nennen wir $f \in \text{Map}(X, Y)$ stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist:

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y: f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$$

$$\text{Hom}(X, Y) := \{ f \in \text{Map}(X, Y) \mid f \text{ stetig} \}$$

$$\text{Iso}(X, Y) := \{ f \in \text{Map}(X, Y) \mid f \text{ bijektiv, stetig, } f^{-1} \text{ stetig} \}$$

Eigenschaften Die Verknüpfung zweier stetiger Abbildungen ist wieder stetig. Konstante Abbildungen sind immer stetig.

Wir nennen eine Abbildung f *offen (abgeschlossen)*, wenn das Bild jeder offenen (abgeschlossenen) Menge wieder offen (abgeschlossen) ist.

Bei bijektiven Abbildungen, welche invariant bezüglich einer Gruppenwirkung sind, hatte auch die Umkehrabbildung diese Eigenschaft. Dies gilt nicht für Bijektionen auf topologischen Räumen. Die Umkehrabbildung zu einer stetigen Abbildung muss nicht selbst stetig sein. Wenn aber beide stetig sind, so nennen wir f (und f^{-1}) *Homöomorphismus*. f erhält dann die topologische Struktur.

3 Lemma:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent, wenn $f: X \rightarrow Y$ eine stetige, injektive Abbildung (das heißt eine *Immersion*) ist:

1. f ist ein Homöomorphismus.
2. f ist offen.
3. f ist abgeschlossen.

Konstruktion von Topologien Wir betrachten eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ wobei eine Topologie \mathcal{T}_Y auf Y gegeben ist. Dann können wir eine Topologie auf X definieren, sodass f stetig ist. Das heißt diese Topologie muss $\mathcal{T}_X := f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$ enthalten. \mathcal{T}_X ist bereits eine Topologie und die größte, für die f stetig ist. Wir sprechen von der durch f *induzierten Topologie*. Das wichtigste Beispiel ist der Fall $X \subset Y$. Dann induziert die identische Abbildung eine Topologie von Y auf X : $\{ U \cap X \mid U \in \mathcal{T}_Y \}$.

Auf der anderen Seite können wir auch davon ausgehen, dass eine Topologie \mathcal{T}_X auf X gegeben ist und wir eine Topologie auf Y suchen, sodass f wiederum stetig ist. Die feinste Topologie, die dies erfüllt ist $\mathcal{T}_Y(f) := \{ U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \}$. Wir nennen sie die *Identifizierungstopologie*.

4 Definition: „Identifizierung“

Ist die Topologie auf dem Bild einer stetigen Abbildung f gerade die Identifizierungstopologie, so heißt f *Identifizierung*.

5 Lemma:

Eine surjektive Abbildung $f \in C(X, Y)$ ist eine Identifizierung, wenn es einen stetigen Schnitt $s \in C(Y, X)$ gibt, sodass $f \circ s = \text{id}_Y$.

6 Lemma:

Die Projektion $\pi: S^2 \rightarrow [-1, 1]$, welche durch die Rotationswirkung von S^1 auf S^2 entsteht, ist eine Identifizierung für die natürlichen Topologien auf S^2 und $[-1, 1]$.

Produkttopologien Sind zwei topologische Räume X, Y gegeben, so können wir eine Topologie auf dem Produktraum erhalten indem wir fordern, dass die Projektionen $\pi_X: X \times Y$ und $\pi_Y: X \times Y$ stetig sind. Das bedeutet $\mathcal{T}_{X \times Y} = \mathcal{T}(\pi_X^{-1}(\mathcal{T}_X) \cup \pi_Y^{-1}(\mathcal{T}_Y))$ entsteht über die Hülle und $\{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X \wedge V \in \mathcal{T}_Y\}$ ist eine Basis dieser Topologie.

Punktengen in einem topologischen Raum Sei $A \subset X$, dann definieren wir das *Innere* von A als

$$\dot{A} := \{x \in A \mid \exists U_x \in \mathcal{T}_X: x \in U_x \subset A\}$$

Das *Komplement* von A bezeichnen wir mit $C_X A$ wobei $C_X A \cap A = \emptyset$ und $C_X A \cup A = X$. (Dies ist eine *Zerlegung* von X .)

$$\bar{A} := \bigcup_{\substack{C \supset A \\ C \text{ abgeschlossen}}} C$$

heißt der *Abschluss* von A und der *Rand* von A ist $\partial A := \bar{A} \setminus \dot{A}$.

7 Definition: „Dichtheit“

Eine Menge A wird als *nirgends dicht* bezeichnet, wenn $\dot{\bar{A}} = \emptyset$ ist und *dicht*, wenn $\bar{A} = X$.

Eine Menge B wird *mager* oder von 1. *Baire-Kategorie* wenn es eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist. Andernfalls heißt B *fett* oder von 2. *Baire-Kategorie*.

8 Definition: „Weg“

Ein *Weg* in X ist eine stetige Abbildung $c: [0, 1] \rightarrow X$. $c(0)$ ist der Beginn und $c(1)$ ist das Ende des Weges. c ist geschlossen falls $c(0) = c(1)$ ist.

9 Definition: „Kurve“

Das Bild eines Wegs heißt *Kurve*.

10 Definition: „Zusammenhang“

Eine Menge heißt (topologisch) *zusammenhängend*, wenn für jede Zerlegung $X = U \cup V$ folgt $\{U, V\} = \{\emptyset, X\}$.

11 Definition: „Zusammenhangskomponenten, wegzusammenhängend“

Betrachten wir die Relation, dass zwei Punkte durch einen Weg verbunden sind, so ist dies eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen nennen wir *Wegzusammenhangskomponenten*. Gibt es nur eine Zusammenhangskomponente, so heißt X *wegzusammenhängend*.

Operationen auf geschlossenen Wegen ($\tilde{\pi}(X, x_0)$) Wir können zwei Wege $c_1, c_2: [0, 1] \rightarrow X$ konkatenieren:

$$(c_1 * c_2)(t) := \begin{cases} c_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c_2(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Unglücklicherweise ist diese Operation weder kommutativ, noch assoziativ. Ebenso ergeben sich keine Inversen Elemente und kein neutrales Element. Das beste was man sich leicht vorstellen könnte ist $c^{-1}(t) = c(1 - t)$ und $\forall t \in [0, 1]: c_{x_0}(t) = x_0$. Deswegen müssen wir gewisse Äquivalenzklassen betrachten.

12 Definition: „Homotopie“

Zwei Abbildungen $f_0, f_1 \in C(X, Y)$ heißen *homotop* bzw. $f_0 \sim f_1$, wenn es eine stetige Abbildung $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ gibt, so dass $F_0(x) := F(0, x) = f_0(x)$ und $F_1(x) := F(1, x) = f_1(x)$. Eine Homotopieklasse ist also die Menge der geschlossenen Kurven, die stetig ineinander verformt werden können. Der Raum der Homotopieklassen bezeichnen wir dann als $\pi_1(X, x_0) = \tilde{\pi}_1(X, x_0) / \sim$. Dies ist eine Gruppe mit der Operation $*$, den obigen Inversen und neutralem Element und wird *Fundamentalgruppe* genannt. Im allgemeinen ist π_1 jedoch nicht abelsch.

13 Definition: „Zusammenhang“

X wird *einfach zusammenhängend* genannt, wenn die Fundamentalgruppe trivial ist (das heißt $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$), *lokal einfach zusammenhängend* wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine einfach zusammenhängende Umgebung gibt und *semilokal einfach zusammenhängend* falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U und eine Abbildung $i: U \hookrightarrow X$ gibt sodass $\pi_1(i) = \{e\}$.

14 Definition: „Homotopieäquivalenz“

Jede Abbildung $f \in C(X, Y)$ induziert einen Homomorphismus

$$\pi_{1,*}(f): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)), c \mapsto f \circ c,$$

sodass $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$.

Als Konsequenz ergibt sich, dass homöomorphe Räume isomorphe Fundamentalgruppen haben, das heißt die Fundamentalgruppe ist eine Homöomorphieinvarianz. Gibt es zwei Abbildungen $f \in C(X, Y)$ und $g \in C(Y, X)$ sodass $f \circ g \sim \text{id}_Y$ und $g \circ f \sim \text{id}_X$, so nennen wir X und Y *Homotopie-äquivalent*. Sie haben isomorphe Fundamentalgruppen.

Beispiele

1. Ist $Y = \{*\} = \mathbb{N}_1$, so nennen wir X *zusammenziehbar*. \mathbb{R}^m ist zusammenziehbar, denn wir haben $F_t(x) := tx$, $F_0(x) = 0$, $F_1 = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$.
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \sim S^1$ wegen $F_t(x) = \frac{x}{|x|}$, $F_0(x) = x$ und $F_1(x) = \frac{x}{|x|} \in S^1$.

Was ist die „eigentliche“ Bedeutung der Fundamentalgruppe?

15 Definition: „Überlagerungen“

Eine Abbildung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ wird *Überlagerung* von X genannt, wenn es zu jedem $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung U_x gibt sodass π eingeschränkt auf die Wegzusammenhangskomponenten von $\pi^{-1}(U_x)$ ein Homöomorphismus ist.

Beachte, dass $\pi^{-1}(x_0)$ eine diskrete Teilmenge von \tilde{X} ist. Im allgemeinen gibt es viele Überlagerungen.

Interessante Fälle Für zwei Überlagerungen \tilde{X}_1 und \tilde{X}_2 gibt es eine Abbildung $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ sodass $\pi_2(f(\tilde{x})) = \pi_1(\tilde{x})$.

1. $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$. Die Automorphismen werden *Deckbewegungen* genannt.

Beispiel Wir betrachten S^m und definieren $f(x) := -x$. Dann ist $f^2 = \text{id}$ und \mathbb{Z}_2 wirkt auf S^m über f . Weiterhin ist $\pi: S^m \rightarrow S^m/\mathbb{Z}_2$ eine Überlagerungsabbildung mit den Deckbewegungen $\{\text{id}, f\}$. Wir schreiben $S^m/\mathbb{Z}_2 =: \mathbb{R}P^m$, der *reelle projektive Raum*. Die Deckbewegungen bilden eine Gruppe $G(\tilde{X}, X)$.

2. Sei $\tilde{X} \in \text{Cov}(X)$ sodass es für jedes $\tilde{X}_1 \in \text{Cov}(X)$ genau eine solche Abbildung $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}$ gibt ($f(\pi_1^{-1}(x_0)) = \pi^{-1}(x_0)$). Dann ist $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ das *universale Element* aus $\text{Cov}(X)$ genannt. Dann ist π eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie. In diesem Fall erhalten wir den *universellen Überlagerungsraum*.

16 Satz:

Angenommen X ist zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfach zusammenhängend. Dann existiert ein universeller Überlagerungsraum für den gilt:

1. \tilde{X} ist genau dann wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend wenn die $\pi_1(\tilde{X}) = 0$ ist.
2. $G(\tilde{X}, X) \simeq \pi_1(X)$.

Wir können also den Überlagerungsraum konstruieren um die Fundamentalgruppe zu bestimmen.

Beispiel Betrachte ein Gitter Γ in \mathbb{R}^m , das heißt eine diskrete Untergruppe des \mathbb{R}^m welche eine Basis von \mathbb{R}^m enthält. Dann ist $\Gamma = G(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m/\Gamma) = \pi_1(\mathbb{R}^m/\Gamma)$. ($\gamma \in \Gamma, t_\gamma(x) = x + \gamma$ definiert die Γ -Wirkung auf \mathbb{R}^m .) $T(\Gamma) = \mathbb{R}^m/\Gamma \simeq^{\text{homöo}} (S^1)^m$ ist der m -Torus.

17 Satz:

Bis auf Äquivalenz wird jedes Element von $\text{Cov}(X)$ durch eine Konjugationsklasse in $\pi_1(X)$ charakterisiert.

1.3.1 Kompaktheit**18 Definition: „Kompaktheit“**

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede Familie offener Mengen, die X überdeckt eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Anwendung Die stetigen Funktionen $C(X, \mathbb{C})$ bzw. $C(X, \mathbb{R})$ über kompakten Mengen X nehmen ein Minimum und Maximum an.

19 Definition: „metrischer Raum“

(X, d) , $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ist ein metrischer Raum, wenn $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ und $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ gilt.

Anwendungen Dies wird zur Definition von konvergenten Folgen benutzt. Außerdem können Lipschitz Funktionen betrachtet werden, das heißt für $f: X \rightarrow Y$ gilt $d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y)$. Ist $C < 1$, so heißt f *Kontraktion* (\rightarrow Banachscher Fixpunktsatz). Weiter können wir abstandserhaltende Funktionen f betrachten. Sie heißen *Isometrien*.

20 Satz:

1. X ist kompakt.
2. Jede beschränkte Folge (x_n) hat einen Häufungspunkt.
3. X ist total beschränkt (präkompakt) und vollständig.

21 Satz: Lebesgue

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ eine offene Überdeckung. Dann gibt es eine größte Zahl λ sodass es eine Verfeinerung durch $\lambda(\mathcal{U})$ -Bälle gibt. Diese Zahl wird *Lebesgue-Zahl* genannt.

22 Definition: „Hausdorff“

Ein topologischer Raum heißt Hausdorff, wenn jede zwei Punkten disjunkte Umgebungen besitzen.

Der Raum der stetigen Funktionen $C(X) := C(X, \mathbb{K})$ ist ein kompakter metrischer Raum als auch eine \mathbb{K} -Algebra, denn die Multiplikation gibt eine Bilinearform. Es existiert sogar eine Norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

die die Eigenschaft $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ erfüllt und $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig, das heißt eine Banach-Algebra.

23 Satz: Stone-Weierstraß

Sei $\mathcal{A} \subset C(X)$ eine Unteralgebra mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\text{id}_{C(X)} \in \mathcal{A}$
2. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$
3. \mathcal{A} separiert die Punkte von X , das heißt für verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X$ gibt es ein $f \in \mathcal{A}$ sodass $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dann ist $\bar{\mathcal{A}} = C(X)$.

Beweis (23) siehe [Yos96]

24 Satz: I. Gelfand

$C(X)$ bestimmt X .

25 Bemerkung:

Ist eine kommutative Banach-Algebra A gegeben, so betrachten wir das maximale Ideal (ein Unterraum von A) als

$$X(A) := \{ \Phi: A \rightarrow \mathbb{K} \mid \Phi(\lambda(a_1 + a_2)) = \lambda\Phi(a_1) + \lambda\Phi(a_2) \wedge \Phi(a_1 a_2) = \Phi(a_1)\Phi(a_2) \}$$

Ist X kompakt, so sind die multiplikativen Funktionale von $C(X)$ von der Form

$$\Phi(f) = f(x_\Phi), x_\Phi \in X$$

1.4 Lineare Algebra**1.4.1 Hierarchie algebraischer Strukturen**

- *Gruppen* $(G, +)$ (zum Beispiel abelsche Gruppen)
- *Ringe*: abelsche Gruppen $(R, +)$ mit einer Operation $\cdot: R \times R \rightarrow R$, Distributivität und Kommutativität.
Nullteilerfreie Ringe heißen *Integritätsbereiche* und *Körper*, wenn $R \setminus \{0\}$ eine Gruppe ist. Körper werden oft mit \mathbb{K} bezeichnet, zum Beispiel $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$.
- (rechts) *Modul* E über einem Ring R : eine abelsche Gruppe $(E, +)$ mit einer Operation von R auf E sodass $r(a + b) = ra + rb$ und $(r + s)a = ra + sa$.
- *Vektorraum*: Ein rechts Modul über einem Körper.

1.4.2 Definitionen

Ist eine Teilmenge $A \subset E$ ein Vektorraum unter $\cdot|_{\mathbb{K} \times A}$, so nennen wir ihn einen *Untervektorraum*. Die *linear Hülle* einer Teilmenge $A \subset E$ eines Vektorraums ist definiert als

$$\text{span } A := \bigcap_{A \subset E' \subset E} E' = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in A \right\} = \langle x_i \rangle_{i=1}^n$$

E' ist Vektorunterraum

$\text{span } A$ ist der von A aufgespannte Untervektorraum. Ist $E = \text{span } \{x_i\}_{i \in I}$, so wird $\{x_i\}_{i \in I}$ ein *Erzeugendensystem* von E genannt. Ein minimales Erzeugendensystem ist eine *Basis* und die *Dimension* wird definiert als $\dim E = \#\{x_i\}_{i \in I}$.

Für zwei Untervektorräume $E_1, E_2 \subset E$ erhalten wir weiter Untervektorräume $E_1 \cap E_2$ und $E_1 + E_2 = \langle E_1, E_2 \rangle$ und es gilt

$$\dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$

Für eine Basis $\{e_i\}_{i \in I}$ schreiben wir eindeutig

$$x = \sum_{i \in I} x^i e_i, \quad x^i \in \mathbb{K}$$

Wir definieren den Vektorraum $E_1 \times E_2$ mittels $\lambda(e_1, e_2) := (\lambda e_1, \lambda e_2)$ und $(e_1, e_2) + (e'_1, e'_2) = (e_1 + e'_1, e_2 + e'_2)$.

Eine Abbildung $f: E_1 \rightarrow E_2$ die mit den Vektorraumstrukturen verträglich ist, das heißt $f(\lambda(e_1 + e_2)) = \lambda f(e_1) + \lambda f(e_2)$, ist ein Vektorraum-*Homomorphismus*. Ist $E_1 = E_2$ so sprechen wir von einem *Endomorphismus*. Ist die Abbildung bijektiv, so ist sie ein *Isomorphismus* und bei $E_1 = E_2$ ein *Automorphismus*. Entsprechende Funktionenräume sind $\text{Hom}(E_1, E_2) = \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $\text{Aut}(E_1)$ und $\text{End}(E_1)$.

Die Darstellung der Vektoren in einer Basis gibt uns einen Isomorphismus $\Phi_E: E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Und wir erhalten:

$$a(x) = \sum_i x^i \underbrace{a(e_{1,i})}_{\in E_2} = \sum_{i,y} x^i a_i^j e_{2,j} = \sum_{j=1}^{m_2} \left(\sum_{i=1}^{m_1} a_i^j \right) e_{2,j}$$

Dann ist $A = (a_i^j)$ eine Matrix über \mathbb{K} .

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{m_1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{m_2} & \cdots & a_{m_1}^{m_2} \end{pmatrix}$$

Spezielle Endomorphismen

1. *Projektionen* sind *idempotente* Endomorphismen $p \in \text{End } E$, das heißt $p^2 = p$. Zum Beispiel die kanonischen Projektionen π_i .

2. *Involutionen* sind Abbildungen $\alpha \in \text{End } E$ mit $\alpha^2 = \text{id}$. Dann ist $p_{\pm} := \frac{1}{2}(\alpha \pm \text{id}_E)$ eine Projektion auf $E_{\pm} := p_{\pm}E$, sodass $E \simeq E_+ \oplus E_-$. Jedes $f \in \mathcal{L}(E)$ wird zerlegt in:

$$f = f^{++} + f^{+-} + f^{-+} + f^{--}, \quad f^{++} = p_+ \circ f \circ p_+, f^{+-} = p_+ \circ f \circ p_-, \dots$$

f wird gerade (ungerade) bzgl. α genannt, wenn $f\alpha = \pm\alpha f$ ist.

$$\alpha p_{\pm} = \frac{1}{2}(\alpha^2 \pm \alpha) = \frac{1}{2}(\text{id} \pm \alpha) = \pm p_{\pm}$$

1.4.3 Kern, Bild, Kokern

Sei $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, dann ist der *Kern* $\text{Ker } f = \{x \in E_1 \mid f(x) = 0\}$ und das *Bild* $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in E_1\}$. Der *Rang* von f ist $\text{rk } f := \dim \text{Im } f$ und der *Kokern* ist $\text{coKer } f = E_2 / \text{Im } f$. $\text{index } f := \dim \text{Ker } f - \dim \text{coKer } f$. Der Isomorphismus $f_*: E_1 / \text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$ wird *fundamentaler Isomorphismus* genannt.

1.4.4 Komplexe

Betrachte eine Folge

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \xrightarrow{d_2} 0$$

wobei $\text{Im } d_0 = \text{Ker } d_1$, $\text{Ker } d_0 = \{0\}$, $\text{Ker } d_2 = E_2 = \text{Ker } d_1$. Dies wird eine *kurze exakte* Folge genannt. Wir erhalten

$$\text{Ker } d_1 = \text{Im } d_0 \simeq E_0 / \text{Ker } d_0 \simeq E_0$$

$$\text{Im } d_1 = E_2 \simeq E_1 / \text{Ker } d_1$$

$$E_1 \simeq E_0 \oplus E_2$$

Solch ein Isomorphismus wird *Splitting* der kurzen exakten Folge genannt. Um es zu definieren braucht man weiter Informationen wie zum Beispiel eine Basis. Im allgemeinen betrachtet man einen Folge

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} E_n \xrightarrow{d_n} 0$$

mit $\text{Im } d_{i-1} \subset \text{Ker } d_i$ für alle i . Dies wird dann ein *Differentialkomplex* genannt. Falls sogar immer $\text{Im } d_{i-1} = \text{Ker } d_i$ gilt, wird die Folge *exakt* genannt.

Beachte $d_i \circ d_{i-1} = 0$. In einem Differentialkomplex können wir Folgendes definieren:

$$H_i(E) = \text{Ker } d_i / \text{Im } d_{i-1} = H_i(E, d), \quad E = (E_i)_i$$

(E, d) wird *exakt* oder *azyklisch* genannt falls $H_i(E) = 0$ für alle i .

1.5 Duale Vektorräume

Wir definieren $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, für einen Vektorraum E über \mathbb{K} als den *dualen Vektorraum* zu E . Ist $(e_i)_{i \in I}$ eine Basis von E , so definieren wir Elemente $\{e^j\}_{j \in I} \subset E^*$ als $e^j(e_i) := \delta(i, j)$. Ist E endlichdimensional, so bildet $(e^j)_{j \in I}$ eine (die sogenannte standard-) Basis von E^* .

Bilineare Abbildung $E \times E^* \rightarrow \mathbb{K}, (v, w^*) \mapsto w^*(v)$. Sind $E_1 \subset E \subset W$ endlichdimensionale Vektorräume, so ist: *Annihilator* $E^0 := \{x^* \in W^* \mid x^*(E) = 0\}$.

$$(E/E_1)^* \simeq E_1^0/E^0$$

1.6 Die Sprache der Kategorien

Eine Kategorie \mathcal{B} besteht aus *Objekten* A, B, C, \dots und *Morphismen* $\text{Mor}(A, B)$ zwischen Objekten. In diesem allgemeinen Sinn ist eine Kategorie ein Graph, wobei Objekte die Knoten und die Kanten die Elemente von $\text{Mor}(A, B)$ sind. Dabei gibt es eine assoziative Komposition von Morphismen, das heißt für $f \in \text{Mor}(A, B)$ und $g \in \text{Mor}(B, C)$ gibt es auch einen Morphismus $gf \in \text{Mor}(A, C)$. Außerdem gibt es immer den identischen Morphismus $1_A \in \text{Mor}(A, A)$ sodass $f1_A = f$ für $f \in \text{Mor}(A, B)$ und $1_B f = f$ für $f \in \text{Mor}(B, A)$.

Kategorien Es gibt zum Beispiel die Kategorie der Mengen Set, welche alle Mengen als Objekte umfasst und wo die Morphismen gerade die Abbildungen sind.

Top ist die Kategorie der topologischen Räume, wobei die stetigen Abbildungen die Morphismen ist.

Vect(\mathbb{K}) ist die Kategorie der Vektorräume über \mathbb{K} und Group ist die Kategorie der Gruppen, wobei die Gruppenhomomorphismen gerade die Morphismen sind.

Funktoren sind Abbildungen F zwischen zwei Kategorien bestehend aus zwei Abbildungen, eine für die Objekte,

$$F_{obj}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

und eine für die Morphismen

$$F_{mor}: \text{Mor}(A, B) \mapsto \text{Mor}(F(A), F(B))$$

Wobei die Komposition erhalten bleibt.

2 Mannigfaltigkeiten

2.1 Differenzierbare Abbildungen

26 Definition: „Differenzierbarkeit“

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $x \in U$. f ist *differenzierbar* in x genau dann, wenn für $|h| < \varepsilon$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U$ gilt

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{df(x)}_{\text{Differential}}[h] + r(x,h)$$

wobei $r(x,h) \leq \delta|h|$ für $\delta > 0$ und $|h| < \rho(\delta)$.

f heißt *differenzierbar* in U , wenn es in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar ist.

27 Bemerkung:

1. $df(x)$ ist eindeutig als lineare Abbildung in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ bestimmt.
2. Die Definition funktioniert analog für Banachräume anstatt von \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n .
3. Jede an x differenzierbare Funktion ist dort auch stetig.
4. Ist $g: X \rightarrow W$ eine weitere Abbildung mit $f(x) \in V, g(f(x)) \in W$ welche differenzierbar in $f(x)$ ist, so ist $g \circ f$ differenzierbar in x und das Differential ergibt sich als

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$$

5. $f(x+h) = f(x) + df(x)[h]$ ist die beste lineare Approximation von f in der Nähe von x .

Es gibt sehr wenige differenzierbare Funktionen unter den stetigen Funktionen. Zum Beispiel Polynomfunktionen, konvergente Potenzreihen (d.h. analytische Funktionen) und stückweise Varianten dieser Typen.

28 Satz: Lebesgue ($m = 1$), Rademacher ($m \geq 1$)

Jede Lipschitz-stetige Funktion in $U \subset \mathbb{R}^m$ ist Lebesgue-fast überall differenzierbar.

Ableitungen höherer Ordnung Es gibt zwei Ansätze:

1. $d \underbrace{df(\cdot)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)}(x)$
2. Wir wählen ein festes h und betrachten $d(df(\cdot)[h])[k]$. Dann schreiben wir $d^2 f(x)[h, k] = d^2 f(x)[k, h]$ (Satz von H. A. Schwarz). Induktiv erhalten wir Ableitungen höherer Ordnung und die k -te Ableitung ist eine symmetrische k -Linearform $d^k f(x)[h_1, \dots, h_k]$.

Exkurs Eine Abbildung $g: E^k \rightarrow F$ mit Vektorräumen E, F ist *k-linear*, wenn sie in allen Variablen linear ist. Sie wird *symmetrisch* genannt, wenn sie für alle Permutationen $x_{\sigma(i)}, \sigma \in S_k$ gleich ist.

29 Satz:

Jedes $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt von Transpositionen. Diese Darstellung ist jedoch nicht eindeutig. Wir können lediglich sagen, dass die Anzahl l der Transpositionen $\chi\sigma = (-1)^l$ unabhängig von der Darstellung ist.

30 Definition: „

Eine Abbildung $E^k \rightarrow F$ heißt *antisymmetrisch* oder *alternierend*, wenn für alle $\sigma \in S_k$ gilt $g(x) = \chi(\sigma)g(\sigma(x))$.

Ist g symmetrisch, so ist es ein homogenes Polynom mit k Variablen und Grad k bezüglich einer beliebigen Basis.

31 Satz: Taylor Formel mit Restglied

Ist $f: U \rightarrow V$ $k+1$ -mal differenzierbar in U , so schreiben wir $f \in C^{k+1}(U, V)$.

Sei nun $f \in C^{k+1}(U, V)$, so gilt für $x \in U$, $B_\delta(x) \subset U$, $|h| < \delta$:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} d^j f(x)[h, \dots, h] + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k d f^{k+1}(x+th)[h, \dots, h] dt \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) + (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^k \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x+th) dt \\ \alpha &\in \mathbb{Z}_+^k, |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_k, \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_k! \end{aligned}$$

32 Satz: Inverse Funktionen Theorem

Sei $f: U \rightarrow V$ in $C^1(U, V)$ mit $df(x)$ invertierbar (also $\dim U = \dim V$). Dann existiert eine offene Umgebung $U' \subset U$ von x mit $f(x) \in V' \subset V$ sodass $f|_{U'}: U' \rightarrow V'$ bijektiv ist und $f^{-1} \in C^1(V', U')$.

Angenommen f ist linear von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^m , so ist $f \in A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ und somit $df(x) = A$ für alle x . Das heißt $A \in GL(\mathbb{R}^m)$. A bedeutet einen Basiswechsel sodass die neuen Koordinaten die linearen Koordinaten $y^1(x), \dots, y^m(x)$ genau dann, wenn dy^1, \dots, dy^m linear unabhängig sind.

33 Definition: „Immersion, Submersion, lokaler Diffeomorphismus“

Sei $f \in C^k(U, V)$, $k \in \mathbb{N}$ und $x \in U$. Dann wird f an der Stelle x bezeichnet mit

Immersion $\Leftrightarrow df(x)$ ist injektiv ($\Rightarrow m \leq n$)

Submersion $\Leftrightarrow df(x)$ ist surjektiv ($\Rightarrow m \geq n$)

lokaler Diffeomorphismus $\Leftrightarrow df(x)$ ist bijektiv ($\Rightarrow m = n$)

Die Bezeichnungen übertragen sich kanonisch auf Mengen statt einzelner Punkte x .

Bemerke Ein lokaler Diffeomorphismus $\mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ muss nicht invertierbar sein.

Fazit Ein lokaler Diffeomorphismus $x \mapsto f(x)$ führt neue *nichtlineare Koordinaten* in U über

$$y^i(x) = \varepsilon^i(f(x)) = \langle f(x), \varepsilon_i \rangle$$

$$\forall i = 1, \dots, n: dg^i(x) = df(x)[\varepsilon_i]$$

34 Satz: Implizite Funktionen Theorem

Sei $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^k(U, V)$. Wir nehmen an, dass $U = U_1 \times V_1$ mit $U_1 \subset \mathbb{R}^m$, $V_1 \subset \mathbb{R}^n$. $f(x) = f(\underbrace{x'}_{\mathbb{R}^m}, \underbrace{x''}_{\mathbb{R}^n}) \in \mathbb{R}^m$. Wir nehmen weiterhin an, dass $df[\cdot, h'']$ invertierbar ist für

ein $x_0 = (x'_0, x''_0) \in U_j$ und dass $f(x_0) = 0$. Dann gibt es offene Mengen $x'_0 \in U_2 \subset U_1, x''_0 \in V_2 \subset V_1$ und ein $g: U_1 \rightarrow V_2$ sodass

$$f^{-1}(0) \cap U_2 \times V_2 = \{ (x', g(x')) \mid x' \in U_1 \}$$

In anderen Worten: $f^{-1}(0) \cap U_2 \times V_2 = \text{Gr}(g)$.

2.2 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Wir brauchen ein $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ wobei

1. M ähnlich zu \mathbb{R}^m sein, insbesondere die Dimension m .
2. M trägt differenzierbare Abbildungen

Also: offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ sollen Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^m sein.

Wir betrachten zuerst einmal Kurven $c: [0, 1] \rightarrow M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ und wollen differenzierbare Abbildungen $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ erhalten. Welche Eigenschaften sollte c haben:

- Stetigkeit ist angebracht. Doch dies reicht nicht aus, denn die Peano-Kurve ist stetig und überdeckt ganz $[0, 1]^2$.
- Also nehmen wir $c \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^{n+1}) := \{ f \in C^1(U_f, \mathbb{R}^{n+1}) \mid U_f \subset \mathbb{R} \text{ offen}, [0, 1] \subset U_f \}$.

35 Lemma:

Für $c \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^{n+1})$ hat das Bild $C = c([0, 1])$ das $n + 1$ -dimensionale Lebesgue-Maß 0.

Beweis (35)

$$t_0 \in [0, 1], t \in [t_0, t_1], \delta > 0$$

$$c(t) = c(t_0) + \underbrace{dc(t_0)}_{c'(t_0)}(t - t_0) + r(t_0, t)$$

- 1.Fall: $|c'(t_0)| \leq \delta$. Angenommen $t_1 - t_0 \leq \delta$:

$$\Rightarrow |c(t) - c(t_0)| \leq \delta(t - t_0) + \varepsilon(t - t_0) \leq \varepsilon\delta(t - t_0), \quad t - t_0 < \delta(\varepsilon), \varepsilon \leq \delta$$

$$\Rightarrow c(t) \in B(c(t_0), 2\delta(t - t_0))$$

$$\text{Vol} B(c(t_1), 2\delta(t - t_0)) \leq 4\delta^2(t - t_0)^2 \leq 4\delta^2(t - t_0)$$

- 2.Fall: $|c'(t_0)| \geq \delta$, $\sup |c'(t)| \leq C_0$.

$$c_1(t_0) = \frac{c'(t_0)}{|c'(t_0)|} = J(e_1(t_0)), J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dan überdeckt $Q_{t_0} c|_{[t_{-1}, t_1]}$ mit $\text{Vol} Q_{t_0} \leq C_0(t_1 - t_{-1})\delta$. In jedem Fall ist $C = c(I) \subset Q$, $Q < C_0\delta$.

36 Definition: „reguläre Wege“

Ein C^k -Weg $c \in C^k([0, 1], \mathbb{R}^{m+1})$ wird *regulär* genannt, wenn

$$\forall t \in [0, 1]: c'(t) \neq 0$$

37 Lemma: Länge eines Weges

Ein regulärer Weg c hat eine Länge:

$$L(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt = \lim_{\delta(\zeta) \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \zeta} |c(t_{i+1}) - c(t_i)|$$

wobei $\zeta = \{0 = t_0 < \dots < t_n = 1\}$, $\delta(\zeta) = \max_i |t_{i+1} - t_i|$.

38 Lemma:

Wir können folgendermaßen Variablen in c ersetzen:

$$s(t) = \int_0^t |c'(u)| du$$

Dies Parametrisiert c über die Bogenlänge $[0, L(c)]$.

39 Bemerkung:

Wir können eine Parametrisierung mittels eines beliebigen C^k -Diffeomorphismus $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Es kann weiterhin passieren, dass ein Weg nicht injektiv ist. Das möchten wir vermeiden.

40 Definition: „Eindimensionale Mannigfaltigkeit“

Eine *eindimensionale Mannigfaltigkeit* ist eine C^k -Kurve in \mathbb{R}^{n+1} welche einen Homöomorphismus nach $[0, 1]$ besitzt.

Dies beinhaltet jedoch nicht S^1 !

41 Definition: „Eindimensionale Untermannigfaltigkeit“

Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine eindimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit, wenn gilt:

1. Es gibt eine offene Überdeckung $U = (U_i)_{i \in I}$ von C .
2. Für jede offene Menge U_i gibt es eine reguläre homöomorphe C^k -Parametrisierung:

$$c_i: (0, 1) \rightarrow C \cap U_i$$

3. Für alle $i, j \in I$ ist $c_i^{-1} \circ c_j \in C^k$. $(0, 1) \supset c_j^{-1}(c_j((0, 1)) \cap c_i((0, 1))) \xrightarrow{c_i^{-1} \circ c_j} (0, 1)$

$(U_i, c_i)_{i \in I}$ nennen wir *Atlas*.

42 Lemma: Parametrisierung des Einheitsquadrats

Es gibt eine glatte Parametrisierung des Rands Einheitsquadrats $\partial([0, 1] \times [0, 1])$.

Beweis (42) Wir können eine stetige Parametrisierung des Einheitsintervalls finden, deren Ableitungen an den Intervallenden verschwinden. Dann wenden wir diese Parametrisierung auf jede Kante des Quadrats und erhalten eine Parametrisierung die sogar an den Ecken glatt ist. Man kann zum Beispiel folgende Funktion wählen:

$$f(t) := \max(0, e^{-\frac{1}{t}})$$

$$\sigma(t) := \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

Dann erfüllt σ gerade die Forderungen.

Beispiel: Die Strophoide Die *Strophoide* ist eine klassische Kurve der griechischen Mathematik. Sie ist definiert als

$$C := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) := (x+1)x^2 + (x-1)y^2 = 0 \right\}$$

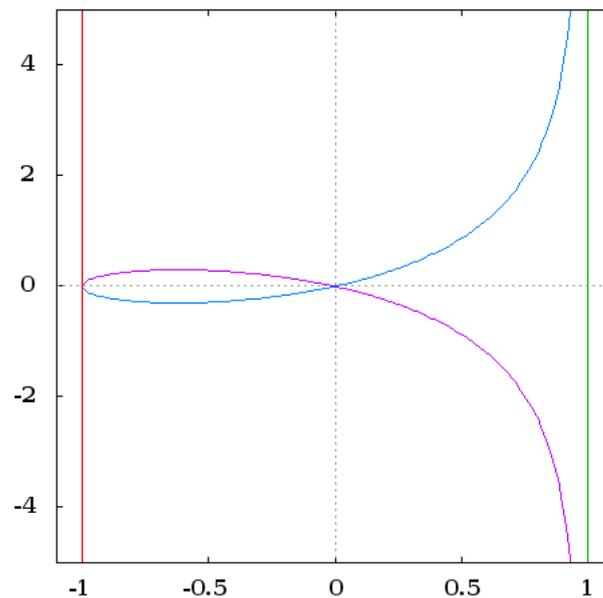
1. F hat keine Lösung für $x \geq 1$ oder $x < -1$
2. Aber $F(-1, 0) = 0$.
3. In $[-1, 1)$ gibt es die Lösungen:

$$y^2 = x^2 \frac{1+x}{1-x} \quad y_{\pm}(x) = \pm x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x(x+1) + x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x-1)y$$

Also ist $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt in C .



Stereographische Projektion Die stereographische Projektion bildet S^m ohne einen Pol auf \mathbb{R}^m ab. Dabei wird jeder Punkt von $x \in S^m$ auf den Schnittpunkt der Geraden durch den Pol und x mit der Äquatorialebene abgebildet. Bis auf Rotation können wir $m = 1$ betrachten. Die Projektionsgerade für einen Punkt $q = (x, y)$ hat gerade die Form $c_q(t) = (1-t)N + tp_n(q) = (0, (1-t)) + (ty, 0) = (ty, 1-t)$. Jetzt suchen wir also $t^* \in (0, 1)$ mit

$$1 = (t^*)^2 y^2 + (1-t^*)^2 = (t^*)^2 y^2 + 1 + (t^*)^2 - 2t^*$$

$$(t^*)^2(1+y^2) = 2t^*$$

$$t^* = \frac{2}{1+y^2} \quad 1-t^* = 1 - \frac{y^2-1}{1+y^2}$$

(Wir setzen $\bar{y} = t^* y$ und $\bar{z} = (1-t^*)$.) Somit bekommen wir eine Parametrisierung von S^1 durch stereographische Projektion vom Nordpol und eine vom Südpol:

$$p_N^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{y^2-1}{y^2+1} \right) \in S^1$$

$$p_N(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{\bar{y}}{1-\bar{z}} = \frac{\bar{y}}{t^*}$$

$$p_S(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{\bar{y}}{1+\bar{z}}$$

Dabei gilt weiterhin

$$p_S(p_N^{-1}(y)) = p_S \left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{y^2-1}{y^2+1} \right) = \frac{\frac{2y}{1+y^2}}{1 + \frac{y^2-1}{y^2+1}} = \frac{2y}{2y^2} = \frac{1}{y}$$

Dies ist also eine C^∞ Abbildung abgesehen von den beiden Polen (die Inversion am Kreis).

2.2.1 Lokale Struktur von differenzierbaren Abbildungen

Wir betrachten Abbildungen $t: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Analoges kann für $f \in C^k$ betrachtet werden.

43 Definition: „Rang, Immersion, Submersion, Diffeomorphismus“

Sei $p \in U$, dann ist der Rang von f bei p :

$$\text{rk } f(p) := \text{rk } df(p) \leq \min\{m, n\}$$

Falls $\text{rk } f(p) = \min\{m, n\}$ ist, so heißt f *Submersion* bei p falls $m \geq n$ und *Immersion* bei p falls $m \leq n$ ist sowie *Diffeomorphismus* für $m = n$. Analog verwenden wir diese Begriffe auf U . Sowie als lokale Versionen, wenn sie für jeden Punkt auf einer Umgebung zutreffen.

44 Definition: „Äquivalente Abbildungen“

Seien $f_j \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ mit $f_j(0) = 0$ für $j = 1, 2$. Dann nennen wir f_1 und f_2 *äquivalent* bei 0 falls es lokale Diffeomorphismen $\phi_1: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\phi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bei 0 mit $\phi_j(0) = 0$ gibt sodass $f_2 = \phi_2 \circ f_1 \circ \phi_1$.

45 Definition: „allgemeine Koordinaten“

Wir betrachten immer die normalen (linearen) Koordinaten $x^i(p) = \varepsilon^i(p)$ aber bezeichnen sie eventuell mit y^i oder z^i (zum Beispiel $y^i(f(x)) = \varepsilon^i(f(x^1, \dots, x^m))$). Beachte, dass $dx^i = \varepsilon_i$ ist. Allgemeiner nennen wir, falls ϕ ein lokaler Diffeomorphismus ist, $y^i = \varepsilon^i(\phi(x))$ die *allgemeinen (nichtlinearen) Koordinaten*, da $dy^i = d\phi(x)[\varepsilon_i]$. Somit sind (y^1, \dots, y^m) Koordinaten in $U \subset \mathbb{R}^m$ genau dann, wenn die Differentiale $dy^1(p), \dots, dy^m(p)$ linear unabhängig sind. (Selbstverständlich ist $y^i: U \rightarrow \mathbb{R}$)

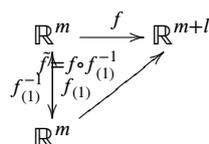
46 Satz:

Sei f glatt bei $0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ und $f(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

1. Falls $\text{rk } f(0) = m \leq n$ ist, (das heißt f ist eine lokale Immersion), dann ist f bei 0 äquivalent zu $i_{m,n}: (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$.
2. Ist $\text{rk } f(0) = m \geq n$ (das heißt f ist eine lokale Submersion), so ist f bei 0 äquivalent zu $p_{m,n}: (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$.

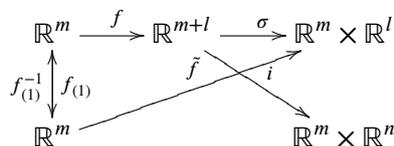
Beweis (46)

1. $m \leq n, n = m + l$



$f(x^1, \dots, x^m) = (f^1, \dots, f^m, f^{m+1}, \dots, f^{m+l})(x) = (f_{(1)}(x), f_{(2)}(x))$ Wir können annehmen, dass $|\det(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0))| > 0$.

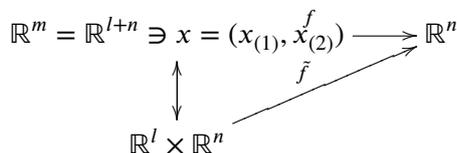
$$\tilde{f}(y) = f(f_{(1)}^{-1}(y)) = (f_{(1)}^{-1}(y), f_{(2)} \circ f_{(1)}^{-1}(y)) =: (y, g(y))$$



Aber dann ist

$$i = f \circ f_{(1)}^{-1}(y) = \tilde{f}(y, g(y)) = (y, g(y) - g(y)) = (y, 0)$$

2.



$$(y_{(1)}, y_{(2)}) \mapsto f(x(y)) = y_{(2)}$$

47 Korollar:

Falls f eine Immersion bei p ist, so gibt es eine Umgebung U_p von p sodass $f: U_p \rightarrow \mathbb{R}^{m+l}$ eine Einbettung ist.

48 Definition: „Untermannigfaltigkeit“

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ wird m -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ($m \leq n, k \in \mathbb{N}$), wenn es eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von M sodass jedes U_i das Bild einer eigentlichen, injektiven C^k -Immersion $\varphi_i: V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit V_α offen in \mathbb{R}^m und $\varphi_i(V_i) \subset M \cap U_i$. Das heißt die φ_i sind Homöomorphismen mit abgeschlossenem Bild, k -mal stetig differenzierbar und das Differential $d\varphi_i(x) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist injektiv ($\text{rk } d\varphi(x) = m$).

Beispiel Betrachten wir $M = S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ und wählen die Parametrisierungen

$$\mathcal{U} = (\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{N\}, \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{S\}) =: (U_N, U_S)$$

$$\varphi_N^{-1} = p_N: U_N \cap S^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

so ist die obige Definition erfüllt.

Fragestellung Ist es wahr, dass auf den Schnitten $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ die Funktion $\varphi_{U_1}^{-1} \circ \varphi_{U_2}$ ein C^k -Diffeomorphismus ist?

49 Lemma:

Falls $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^k -Parametrisierung ist, dann ist ψ^{-1} lokal die Einschränkung einer C^k -Abbildung. Genauer gesagt gibt es für jedes $x \in V$ eine Umgebung $\tilde{U}_{\psi(x)}$ von $\psi(x) \in \mathbb{R}^n$ und $\psi^V \in C^k(\tilde{U}_{\psi(x)}, V)$ sodass $\psi^V|_{\psi(V)} = \psi^{-1}|_{\tilde{U}_{\psi(x)}}$. (Das ist das gleiche wie $\psi^V \circ \psi = \text{id}_V|_{\psi^{-1}(\tilde{U}_{\psi(x)})}$.)

Beweis (49) Wir betrachten erneut die Argumentation die uns zur Normalform einer Immersion geführt hat. Sei $V \supset V_0 \ni x_0$ mit $V_0 = B_\varepsilon(x_0)$ und ε hinreichend klein. Die Zerteilung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+l}$ bei $\psi(x_0)$ wird nun wie folgt angepasst:

Sei $T_{\psi(x_0)}M := d\psi(x_0)[\mathbb{R}^m]$ eine m -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^n und W das Komplement unter der direkten Summe:

$$\mathbb{R}^n = T_{\psi(x_0)}M \oplus W$$

mit den Projektionen $P: \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\psi(x_0)}M$, $Id - P: \mathbb{R}^n \rightarrow W$. Nach der Definition von $d\psi$ gilt:

$$\begin{aligned} \psi(x_0 + h) &= \psi(x_0) + d\psi(x_0)[h] + r(x_0, h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0, h)}{|h|} = 0 \\ P(\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)) &= d\psi(x_0)[h] + Pr(x_0, h) \\ &= (d\psi(x_0))[h + (d\psi(x_0))^{-1}(Pr(x_0, h))] =: d\psi(x_0)[\sigma_{x_0}(h)] \end{aligned}$$

Wobei $\sigma_{x_0}: B_\varepsilon(0) \rightarrow B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^m$ ein C^k -Diffeomorphismus auf sein Bild ist für hinreichend kleines ε . Dann folgt in den Koordinaten $(z_1, z_2) \in T_{x_0}M \times W$ und $y = \sigma_{x_0}(h)$, $h \in B_\varepsilon(0)$, $h(y) = \sigma_{x_0}^{-1}(y)$

$$\psi(x_0 + h(y)) - \psi(x_0) = (d\psi(x_0)[y], g_{x_0}(y))$$

mit einem $g \in C^k(\sigma_{x_0}(B_\varepsilon(0)), W)$ und somit ist

$$d\psi(x_0)^{-1}P(\psi(x_0 + h(y)) - \psi(x_0)) = y, y \in \sigma_{x_0}(B_\varepsilon(0))$$

Für $y \in \sigma_{x_0}(B_\varepsilon(0))$ bzw. $h(y) \in B_\varepsilon(0)$, also $x_0 + h(y) \in B_\varepsilon(x_0)$ ist also $\psi(B_\varepsilon(x_0)) =: \tilde{U}_{\psi(x_0)}$ die gesuchte Umgebung von $z_0 := \psi(x_0) \in \mathbb{R}^n$ denn dort gilt:

$$\begin{aligned} \psi^V(z) &:= \psi^{-1}(z_0) + \sigma_{x_0}^{-1}d\psi(x_0)^{-1}P(z - z_0) \\ \Rightarrow (\psi^V \circ \psi)(x_0 + h(y)) &= x_0 + \sigma_{x_0}^{-1}(y) = x_0 + h(y) \end{aligned}$$

50 Lemma: Tangentialraum

Der Raum

$$T_yM := d\psi(\psi^{-1}(y))[\mathbb{R}^m]$$

wird *Tangentialraum* von M bei y genannt. Es ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ψ .

Beweis (50) Wir geben eine andere Beschreibung von $T_y M$ an:

$$\widetilde{T}_y M = \{ c'(0) \mid c: (-\varepsilon_c, \varepsilon_c) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist eine reguläre } C^1\text{-Kurve mit } c(-\varepsilon_c, \varepsilon_c) \subset M, c(0) = y \}$$

Dann erhalten wir:

$$c(t) = \psi(p + tv), \psi(p) = y \Rightarrow c'(0) = d\psi(p)[v]$$

und da $d\psi(p)$ vollen Rang hat, sind $\widetilde{T}_y M$ und $T_y M$ isomorph.

Beachte: Dies ist die geometrische Definition des Tangentialraums. Wir wissen, dass $\psi(x_0) + T_{\psi(x_0)} M$ die beste lineare Approximation von M bei $\psi(x_0)$ ist.

51 Definition: „Repräsentation des Tangentialraums“

Ein C^k -Weg $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ repräsentiert $X \in T_x M$, falls $c(0) = x$ und $c'(0) = X$.

52 Korollar:

Damit kann die obige Fragestellung positiv beantwortet werden. $\varphi_{U_1}^{-1} \circ \varphi_{U_2}$ ist ein lokaler C^k -Diffeomorphismus.

Jetzt können wir differenzierbare Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten $M_1^{m_1} \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $M_2^{m_2} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ definieren.

53 Definition: „ C^l -Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten“

Eine Abbildung $f: M_1^{m_1} \rightarrow M_2^{m_2}$ zwischen C^k -Untermannigfaltigkeiten heißt C^l -Abbildung auf $U \subset M_1^{m_1}$, falls

$$\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1 \in C^l(\psi_1^{-1}(U), \psi_2^{-1}(f(U)))$$

für alle regulären Parametrisierungen ψ_j von M_j , $j = 1, 2$ gilt.

Jede solche Abbildung definiert ein Differential

$$df(x): T_x M_1 \rightarrow T_{f(x)} M_2, df(x)[X] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(c(t))$$

für beliebige C^k -Wege c die X repräsentieren.

Beispiele

1. Die n -dimensionalen C^k -Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n sind gerade die offenen Mengen.
2. Die 0-dimensionalen zusammenhängenden C^k -Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n sind die Einpunktmengen.
3. Die 1-dimensionalen zusammenhängenden C^k -Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n sind die injektiven C^k -Kurven und die einfach geschlossenen Kurven. Eine 1-dimensionale Unterbasis des \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ wird *Knoten* genannt.
4. Der m -Torus $T^m: (S^1)^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ über $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$(x^1, x^2, \dots, x^m) \rightarrow (\cos t_1, \sin t_1, \dots, \cos t_m, \sin t_m)$$

54 **Satz:**

Ist $M_i^{m_i}$ eine C^k -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^m , $i = 1, 2$, dann ist $M_1 \times M_2$ eine $m_1 + m_2$ -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit.

weiter Beispiele5. **Rotationsflächen in \mathbb{R}^3**

Sei $c(t) = (c_1(t), c_3(t))$ ein C^k -Weg in \mathbb{R}^2 , $t \in (0, 1)$, $\|c'(t)\| = 1$, $c_1(t) > 0$.

$$\psi(t, \theta) = \begin{pmatrix} c_1(t) \cos(\theta) \\ c_1(t) \sin(\theta) \\ c_3(t) \end{pmatrix} \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

Dann ist ψ eine reguläre Parametrisierung, denn

$$d\psi(t, \theta) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \cos(\theta) & -c_1(t) \sin(\theta) \\ c_1'(t) \sin(\theta) & -c_1(t) \cos(\theta) \\ c_3'(t) & 0 \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 nach obigen Bedingungen.

Beispiele für Rotationsflächen

- Paraboloid: $(c_1, c_3)(t) = (t, t^2)$
- Hyperboloid: $c_1(t) = a^2 \sqrt{d + t^2}$, $c_3(t) = c^2 t$. Dabei müssen die Fälle $d > 0$ wo man einen einschaligen Hyperboloid erhält und $d < 0$ wo man einen zweischaligen Hyperboloid erhält unterschieden werden. Bei $d = 0$ entsteht der Doppelkegel.
- Torus: $c_1(t) = R + r \cos(t)$, $c_3(t) = r \sin(t)$ wobei R der Revolutionsradius und r der Rotationsradius ist.
- Das Möbiusband ist selbst keine Rotationsfläche im \mathbb{R}^3 . Wir können es zum Beispiel als

$$M: = (S^2 \setminus \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\}) / (x \sim -x)$$

definieren. Dann ist der Rand ein Schnitt des Torus und wir erhalten eine Parametrisierung des Möbiusbands:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}) \cos(u) \\ (1 + \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2}) \sin(u) \\ \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \end{pmatrix}, \quad v \in (-1, 1), u \in [0, 2\pi)$$

55 Definition: „Verbundene Summe“

Die verbundene Summe $M_1 \# M_2$ für zwei Oberflächen M_1, M_2 (zum Beispiel 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^3) wird konstruiert als

- Nimm einen beliebigen Vollkreis aus jedem der M_j .
- Klebe die beiden Teile zusammen mittels Diffeomorphismen, die die Orientierung der Kreise an den Schnittstellen umkehren. $x \sim \psi(x)$

$$M_1 \# M_2 := (M_1 \times M_2) / \sim$$

56 Bemerkung:

Jede abgeschlossene, zusammenhängende, orientierbare Oberfläche in \mathbb{R}^3 ist entweder homöomorph zu S^2 oder zu $T^2 \# \dots \# T^2$.

6. Das *Tangentialbündel* für $M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $TM^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ist definiert als

$$TM := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M$$

mit der Parametrisierung $(\psi, d\psi): V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ für eine lokale Parametrisierung ψ von M .

Es gibt ein hilfreiches Kriterium um zu zeigen, dass eine Menge eine Untermannigfaltigkeit ist.

57 Satz: Satz vom regulären Wert

Sei $F \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$, $k \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $M_y := F^{-1}(\{y\})$ und F eine C^k -Submersion auf M_y . Dann ist M_y eine m -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

58 Definition: „regulärer, kritischer Punkt/Wert, Morsefunktion“

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$.

1. Sei $F: U \hookrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k -Abbildung. Dann nennen wir $x \in U$ *regulärer Punkt* falls $dF(x)$ eine Surjektion ist, andernfalls *kritischer Punkt*. ($\text{Reg } F$, $\text{Crit } F$)
2. $y \in V$ wird *regulärer Wert* von F genannt, falls $F^{-1}(\{y\}) \subset \text{Reg } F$. Sonst sagen wir y ist ein *kritischer Wert*.
3. Für $n = 1$, das heißt $F: U \rightarrow \mathbb{R}$: Ein kritischer Punkt $x \in \text{Crit } F$ wird *nicht entartet* genannt, falls die quadratische Form

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \ni (h, g) \mapsto d^2 F(x)[h, g] \in \mathbb{R}^n$$

nicht singulär ist. Sind alle kritischen Punkte von F nicht entartet, so heißt F *Morsefunktion*.

59 Bemerkung:

- Ist $m = 0$, so ist $\text{Crit } F = \{ x \in U \mid dF(x) = 0 \}$.
- Die Definition kann für Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten $f \in C^k(M_1, M_2)$ angepasst werden.

60 Satz: Satz von Sard

Sei $f \in C^k(M_1, M_2)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Menge deren kritische Werte das Maß 0 in M_2 haben.

61 Definition: „Maß in Untermannigfaltigkeiten“

Eine Teilmenge A einer C^k -Untermannigfaltigkeit hat das Maß 0 falls $\psi^{-1}(A)$ das Maß 0 in \mathbb{R}^n hat, für alle regulären Parametrisierungen ψ .

2.3 Mannigfaltigkeiten

Bisher haben wir Untermannigfaltigkeiten M über C^k -Einbettungen j in \mathbb{R}^n betrachtet. Das heißt j muss ein Homöomorphismus und C^k -Immersion von M auf $j(M)$ sein. Im Folgenden wollen wir uns von dieser Einbettung lösen und die intrinsischen Eigenschaften von M betrachten. Dabei gibt es folgende Beobachtungen:

1. M ist ein topologischer Raum, der insbesondere Hausdorff ist und sogar eine Metrik besitzt.
2. Anstatt der Parametrisierungen können wir auch Karten betrachten $x_U = \psi_U^{-1}$, $x_U: U \rightarrow V_U \subset \mathbb{R}^m$.
3. Es gibt eine gewisse Kompatibilitätsforderung: $x_U \circ x_{U'}^{-1}$ ist eine C^k -Diffeomorphismus.

62 Definition: „lokal euklidische Räume“

Sei M ein topologischer Hausdorffraum in dem das zweite Abzählbarkeitsaxiom gilt. (Das heißt es gibt eine abzählbare Basis von offenen Mengen. Zum Beispiel besitzt die Topologie des \mathbb{R}^m die abzählbare Basis $\{ B_a(x) \mid x \in \mathbb{Q}^m, a \in \mathbb{Q}, a > 0 \}$.) Dann nennen wir M *lokal euklidisch*, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Menge in einem \mathbb{R}^m ist.

63 Satz: Brouwer

Sei f ein Homöomorphismus zwischen zusammenhängenden offenen Mengen $U_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$. Dann ist $m_1 = m_2$.

64 Korollar: Eindeutigkeit der Dimension

Jeder zusammenhängende lokal euklidische Raum besitzt eine eindeutige Dimension.

65 Definition: „topologische Mannigfaltigkeiten“

Eine m -dimensionale *topologische Mannigfaltigkeit* ist ein lokal euklidischer Raum der Dimension m .

66 Definition: „Karte, Atlas“

Sei M^m eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension m . Eine Familie $(U_\alpha, x_{U_\alpha})_{\alpha \in \mathcal{B}}$ von offenen Mengen U_α , die M^m überdecken, und Homöomorphismen $x_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ wird für $k \in \bar{\mathbb{N}}$ C^k -Atlas von M^m genannt, wenn C^k -Kompatibilität erfüllt ist:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}: x_{U_\alpha} \circ x_{U_\beta}^{-1} \in C^k(x_{U_\beta}(U_\alpha \cap U_\beta), x_{U_\alpha}(U_\alpha \cap U_\beta))$$

Jedes Paar (U_α, x_{U_α}) wird *Karte* genannt und zu x_{U_α} sagen wir auch *Koordinatensystem* mit $x_{U_\alpha}^n = \varepsilon^n \circ x_{U_\alpha}$. In der Regel bezeichnen wir $\mathcal{A} = (U_\alpha, x_{U_\alpha})$.

67 Definition: „kompatible Atlanten“

Seien \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 zwei Atlanten einer Mannigfaltigkeit M^m , dann sagen wir die Atlanten sind C^k -kompatibel, wenn $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ wieder ein Atlas ist.

Da kompatible Atlanten durch Inklusion halbgeordnet sind, besitzt jede total geordnete Kette von Atlanten ein maximales Element. Nach Zorns Lemma gibt es also für jeden Atlas den maximalen Atlas $\bar{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$, welcher alle zu \mathcal{A} kompatiblen Atlanten enthält.

68 Definition: „ C^k -Struktur, C^k -Mannigfaltigkeit“

Sei M^m eine topologische Mannigfaltigkeit, dann wird ein maximaler C^k -Atlas $\bar{\mathcal{A}}$ C^k -Struktur auf M^m genannt und $(M^m, \bar{\mathcal{A}})$ ist eine C^k -Mannigfaltigkeit.

Beispiel 1 Sei M^m eine C^k -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , dann definiert ein beliebiger Atlas $\mathcal{A}(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{B}}$ bereits eine C^k -Struktur auf M^m und der maximale Atlas ist:

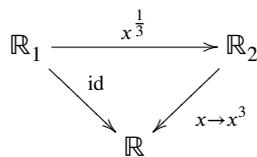
$$\bar{\mathcal{A}} = \{ x = \psi^{-1}, \psi: V \rightarrow \psi(V) \subset M^m \mid j \circ \psi \text{ ist eine injektive, eigentliche Immersion} \}$$

69 Satz:

Eine C^k -Untermannigfaltigkeit $M \hookrightarrow^j \mathbb{R}^n$ ist eine C^k -Mannigfaltigkeit für eine C^k -Einbettung j und umgekehrt.

Beispiel 2 Wir zeigen, dass es verschiedene C^k -Strukturen auf dem gleichen Raum geben kann: Betrachte \mathbb{R} zum einen mit der kanonischen C^k -Struktur $\mathbb{R}_1 = (\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$ und zum anderen mit der Struktur $\mathbb{R}_2 = (\mathbb{R}, x \mapsto x^3)$. Diese beiden sind jedoch nicht kompatibel da $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ nicht C^1 ist.

Allerdings sind sie diffeomorph:



Doch selbst wenn man alle diffeomorphe Strukturen identifiziert gibt es, wie J. Milnor gezeigt hat, auf S^7 28 nicht-äquivalente differenzierbare Strukturen. Für \mathbb{R}^m und $m \neq 4$ gibt es genau eine differenzierbare Struktur. Jedoch gibt es auf \mathbb{R}^4 überabzählbar unendlich viele nicht-äquivalente differenzierbare Strukturen.

Im Folgenden werden wir in der Regel über C^k -Mannigfaltigkeiten mit $k = \infty$, das heißt *glatte Mannigfaltigkeiten* sprechen.

70 Definition: „Unterobjekte“

Sei M^m eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann heißt eine Mannigfaltigkeit N^n *Untermannigfaltigkeit* von M^m , wenn es eine glatte Einbettung $j: N^n \rightarrow M^m$ gibt.

71 Satz: Whitney

Jede glatte Mannigfaltigkeit ist Untermannigfaltigkeit eines gewissen \mathbb{R}^n .

72 Definition: „Kartesische Produkte“

Sind $M_1^{m_1}, M_2^{m_2}$ glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension m_1 bzw. m_2 dann ist das kartesische Produkt $M_1^{m_1} \times M_2^{m_2}$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $m_1 + m_2$.

Beweis (72) Sind \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 Atlanten von M_1 bzw. M_2 und $M_1 \times M_2$ mit der Produkttopologie, so ist

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{ (U_1 \times U_2, x_{U_1} \times x_{U_2}) \mid (U_1, x_{U_1}) \in \mathcal{A}_1, (U_2, x_{U_2}) \in \mathcal{A}_2 \}$$

eine Atlas auf dem Produkt und

$$(x_{U_1} \times x_{U_2}) \circ (x_{U'_1} \times x_{U'_2})^{-1} = (x_{U_1} \circ x_{U'_1}^{-1}) \times (x_{U_2} \circ x_{U'_2}^{-1})$$

ist ein Diffeomorphismus.

Abbildungen Sind $f_i: M_i \rightarrow N_i$ glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, so ist auch $f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$ eine glatte Abbildung.

Beispiel 1 $\mathbb{P}\mathbb{R}^m$ ist der m -dimensionale *projektive Raum*

Er kann zum Beispiel definiert werden als der Raum der 1-dimensionalen Untervektorräume von \mathbb{R}^{m+1} , das heißt der Raum aller Ursprungsgeraden. Dies kann man dann auch als Restklassen unter $x \sim y: \exists \lambda \in \mathbb{R}^*: x = \lambda y, x, y \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$. Oder aber man betrachtet nur diese Äquivalenzklassen über S^m . Dort stellt sich dies dar als $\alpha(x) := -x, \mathbb{P}\mathbb{R}^m := S^m / \mathbb{Z}_2 = S^m / \alpha$.

Nun wollen wir einen Atlas für $P\mathbb{R}^m$ definieren. Dazu betrachten wir

$$\tilde{U}_i = \{ x \in S^m \mid x_i \neq 0 \}, i = 1, \dots, m+1$$

Dann wird S^m von den \tilde{U}_i überdeckt. Jetzt definieren wir $x_{\tilde{U}_i}: \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^m, x_{\tilde{U}_i}(x^1, \dots, x^{m+1}): = (\frac{x^1}{x^i}, \dots, (1, \dots, \frac{x^{m+1}}{x^i}) \in \mathbb{R}^m$ und wir erhalten über die Injektion eine Karte von $P\mathbb{R}^m$: $x_{U_i} := x_{\tilde{U}_i} \circ \pi^{-1}$.

Wir müssen zum einen zeigen, dass $x_{U_i} = x_i$ ein Homöomorphismus von U_i nach \mathbb{R}^m ist und zum anderen, dass die $x_i \circ x_j^{-1}$ Diffeomorphismen sind. Außerdem müssen wir Folgendes sagen: Die Topologie ist fest, da $U_i = \pi(\tilde{U}_i)$ das Bild einer offenen Menge in \mathbb{R}^m ist.

- x_i ist bijektiv, denn es ist injektiv und surjektiv:

injektiv

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots\right) &= \left(\frac{x'^1}{x'^i}, \dots\right) \\ \Rightarrow \forall j: \frac{x'^j}{x'^i} x^j &= x'^j \\ \Rightarrow \tilde{x}_j^{-1} &= \{x, -x\} \quad \text{mit} \quad \tilde{x}_i(x) = y \end{aligned}$$

surjektiv Ist $\mathbb{R}^m \ni y = x_i(z)$ für ein z , so ist

$$\frac{z^j}{z_i} = \begin{cases} y^j, & 1 \leq j < i \\ y^{j-1}, & i < j \leq m+1 \end{cases}$$

dann müssen wir nur $z^i = 1$ wählen.

x_i ist also eine Bijektion und sowohl x_i als auch x_i^{-1} sind stetig.

Beispiel 2 Das Tangentialbündel

Bei Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n hatten wir $\mathbb{R}^n \supset T_p M = d\psi(\psi^{-1}(p))[\mathbb{R}^m]$. Dies ist das gleiche wie

$$\{ c'(0) \in \mathbb{R}^n \mid c \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^n), c(t) \in M, c(0) = p \}$$

Betrachten wir nun Richtungsableitungen von Funktionen $f \in C^\infty(M)$: für $c \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ und $c(0) = p$ ist

$$L_{c,p}(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ c(t) = \langle c'(0), \nabla f \rangle$$

Was sind nun die Abbildungseigenschaften von $L_{c,p}$?

1. $L_{c,p}$ ist linear auf $C^\infty(M)$.
2. $L_{c,p}(f_1 f_2) = L_{c,p}(f_1) f_2(p) + f_1(p) L_{c,p}(f_2)$

Aufgabe Jedes $L_{c,p}$ in \mathbb{R}^n ist von der Form $\langle X, \nabla f(p) \rangle$ mit $X = c'(0)$.

73 **Definition: „Derivation“**

Eine lineare Abbildung $L: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\forall f_1, f_2 \in C^\infty(M): L(f_1 \cdot f_2) = L(f_1) \cdot f_2(p) + f_1(p) \cdot L(f_2)$$

(Produktregel) wird *Derivation* bei p genannt.

74 **Definition: „Tangentenraum“**

Für eine Mannigfaltigkeit M und $p \in M$ definieren wir

$$T_p M := \{ L: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid L \text{ ist eine Derivation bei } p \}$$

Da jede glatte Kurve durch p eine Derivation bestimmt und jede Derivation auf diese Weise dargestellt werden kann, können wir Tangentialvektoren durch Kurven darstellen und schreiben: $X = L = c'(p)$ falls L durch c dargestellt wird, das heißt

$$L(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ c(t)$$

für c durch p .

Beispiel Offene Teilmengen von Mannigfaltigkeiten (insbesondere \mathbb{R}^n) sind wieder Mannigfaltigkeiten.

Zum Beispiel ist $GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$ isomorph zu einer Teilmenge von \mathbb{R}^{n^2} , also eine Mannigfaltigkeit. Insbesondere ist $GL(n, \mathbb{R})$ eine Gruppe unter der Matrizen-Multiplikation und die Gruppenoperationen sind C^∞ -Abbildungen. Dies führt zum Begriff der *Lie-Gruppen*.

75 **Definition: „Allgemeine Untermannigfaltigkeit“**

$M_1^{m_1}$ ist *Untermannigfaltigkeit* von $M_2^{m_2}$, wenn es eine glatte Einbettung $j: M_1 \rightarrow M_2$ gibt. Ist j nur eine Immersion, so heißt M *immertierte Untermannigfaltigkeit*.

76 **Satz: Richtungsableitungen**

Es sei D_x eine Derivation auf $C^\infty(M)$ im Punkt p und $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p \in U \subset M$ eine Karte bei p . Ferner sei für $i = 1, \dots, m$ die *Richtungsableitung* von $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ nach x^i :

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f := \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x(p)} (f \circ x^{-1})$$

(Dies ist eine Derivation in p .)

Dann ist

$$D_x f(p) = \sum_{i=1}^m y^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f$$

für ein passendes $y \in \mathbb{R}^m$ in Abhängigkeit von den Koordinaten x und $\dim T_p M = m$.

Beweis (76)

- O.B.d.A sei $x(p) = 0$. Sei $U \subset M$ und $f \in C^\infty(U)$ so ist $D_x f$ wohldefiniert. Wähle $\phi \in C_c^\infty(U) := \{ f \in C^\infty(U) \mid \text{supp } f \text{ ist kompakt} \}$ mit $\phi(q) = 1$ in einer Umgebung von p und setze

$$\tilde{\phi}(q) := \begin{cases} \phi(q), & q \in U \\ 0, & q \notin U \end{cases} \in C^\infty(M)$$

Sei $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ mit $\tilde{f}|_{U'} = f$ für $U' \subset U$ offen, $p \in U'$ und setze $D_x f(p) := D_x \tilde{f}(p)$ unabhängig von der Wahl der Forsetzung weil

$$D_x \tilde{\phi} \tilde{f}(p) = f D_x(\tilde{f})(p) + \tilde{f}(p) D_x \tilde{\phi}(p)$$

$\tilde{\phi} \in C_c^\infty(U)$, $\tilde{\phi} \tilde{\phi} = \tilde{\phi} \Rightarrow \tilde{\phi} = 1$ auf $\text{supp } \tilde{\phi}$.

$$\Rightarrow D_x \tilde{\phi}(p) = D_x \tilde{\phi} \tilde{\phi}(p) = D_x \tilde{\phi}(p) + D_x \tilde{\phi}(p)$$

Für zwei Funktionen $f_1, f_2 \in C^\infty(U)$ definieren wir die Äquivalenzrelation $f_1 \sim f_2 : \Leftrightarrow \exists U' \subset U, p \in U' : f_1|_{U'} = f_2|_{U'}$ und nennen die Äquivalenzklassen $[f]_p$ die Keime von f in p . Dann ist D_x auf den Keimen im Punkt p definiert. (Dies ist der Beginn der Garbentheorie.)

- Sei $f \in C^\infty(U)$, dann ist mit $q \in U, \chi = x(q)$

$$f \circ x^{-1}(\chi) = f \circ x^{-1}(0) + \sum_{i=1}^m \chi^i \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(p)) + \sum_{i,j=1}^m \chi^i \chi^j \tilde{f}_{ij}(\chi)$$

$$\Rightarrow f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^m x^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q f + \sum_{i,j=1}^m x^i(q) x^j(q) f_{ij}(q)$$

$$\Rightarrow D_x f(p) = \underbrace{f(p) D_x 1}_{=0} + \sum_{i=1}^m \left(\underbrace{D_x(x^i)(p)}_{y_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f + \underbrace{x^i(p)}_{=0} D_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f \right) \right)$$

Wir schreiben jetzt $D_x =: X \in T_p M$, X ein Tangentialvektor, interpretiert als Derivation auf den Keimen C_p^∞ . Wir haben also

$$X = \sum_{i=1}^m X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

77 Satz: Koordinatenwechsel

Es seien x, y Koordinatensysteme, d.h. Karten bei p . Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\ X &= \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p \\ \Rightarrow Y^j &= \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\end{aligned}$$

78 Definition: „Differential“

Es sei $g \in C^\infty(M_1, M_2)$ und $p \in M_1$. Dann definieren wir das *Differential* von g bei p für beliebige $f \in C^\infty(M_2)$:

$$dg(p)[X](f) = X(f \circ g)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ g \circ c_x)(t)$$

79 Definition: „Tangentialbündel“

$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$ heißt das *Tangentialbündel* von M mit der Projektion $\pi|_{T_p M} (T_p M) = \{p\}$.

Bemerkung $T_p M \cap T_q M \neq \{0\} \Rightarrow p = q$

Ziel Wir wollen zeigen, dass TM eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

80 Satz: Struktur des Tangentialbündels

TM besitzt eine glatte Struktur derart dass $\pi: TM \rightarrow M$ eine glatte Submersion ist.

Beweis (80) Wähle (U, x_U) für M und produziere

$$x_{\pi^{-1}(U)} \ni X \mapsto (x_U(\pi(X)), (x^1, \dots, x^m)) \in \mathbb{R}^{2m}$$

mit $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q$. Dies gibt uns einen Atlas von TM .

1. Als Basis der Topologie von TM wählen wir die Mengen

$$\left\{ (x_{\pi^{-1}(U)})^{-1}(O) \mid U \in \mathcal{U}, O \text{ offen in } x_{\pi^{-1}(U)}(\pi^{-1}(U)) \right\}$$

2. Dannach ist jedes $x_{\pi^{-1}(U)}$ ein Homöomorphismus $\pi^{-1}(U) \rightarrow x_{\pi^{-1}(U)}(\pi^{-1}(U))$ mit offenem Bild. Es bleibt zu zeigen

$$x_{\pi^{-1}(U)} \circ (y_{\pi^{-1}(U')})^{-1} \text{ auf } x_{\pi^{-1}(U')}(\pi^{-1}(U \cap U'))$$

Also betrachte die Abbildung $(y_{U'}(q), Y) \rightarrow (x_U(q), X)$ mit $Y^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(q) X^j$.

$$y_{U'}(q) = (y_{U'} \circ x_U^{-1})(x_U(q))$$

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(q) \right)^{-1} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(q) \right)$$

Eine einfache Konsequenz ist, dass für $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ auch $df \in C^\infty(TM_1, TM_2)$ ist.

81 Korollar: Kettenregel

Seien $f \in C^\infty(M_1, M_2), g \in C^\infty(M_2, M_3)$, so ist

$$g \circ f \in C^\infty(M_1, M_3) \wedge d(g \circ f)(p) = (dg(f(p)))df(p)$$

Beispiel

1. Ist E ein endlich dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension m , so ist E eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m und diffeomorph zu \mathbb{R}^m unter Wahl einer geeigneten Basis. Um $T_e E$ zu bestimmen, verwenden wir die Translation $\tau_e(v) := v + e$. Dann sei $v \in E$ mit der zugehörigen Derivation bei 0: $Vf := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(tv)$. Dann ist

$$T_e E = d\tau_e[E = T_0 E] \simeq T_0 E$$

Somit ist $TE \simeq E \oplus E$ über $(e_1, e_2) \mapsto \tau_{e_1}(e_2)$.

2. Für TS^m mit der natürlichen Einbettung $S^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$. Dann können wir auch TS^m mittels dj in $T\mathbb{R}^{m+1}$ einbetten und

$$dj(x)[X] = \sum_{i=1}^{m+1} X^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x, \quad \langle x, X^j \rangle = 0$$

3. Um $T_{(p_1, p_2)} M_1 \times M_2$ darzustellen müssen wir bei den Injektionen die jeweils andere Koordinate fest wählen und dann erhalten wir

$$T_{(p_1, p_2)} M_1 \times M_2 \simeq T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2$$

82 Definition: „Vektorfelder“

Ein *glattes Vektorfeld* X auf M ist ein glatter Schnitt von π , das heißt $X \in C^\infty(M, TM)$ mit $\pi \circ X = \text{id}_M$.

Für $M = \mathbb{R}^m$ ist ein glattes Vektorfeld ein Element von $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Das duale Objekt zu $T_p M$ ist $(T_p M)^* = T_p^* M$. Sei $f \in C^\infty(M)$ dann ist $df \in C^\infty(TM, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$$df[X](p) = \alpha(X, f) \left. \frac{d}{dx} \right|_{f(p)} =: \alpha(X, f)$$

c_X generiert eine Kurve:

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \Rightarrow df[X](p) = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = Xf(p)$$

83 Lemma: Kotangentialbündel

Das *Kotangentialbündel* von M ist definiert als:

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

Jeder Kotangentialraum T_p^*M ist ein Vektorraum der Dimension m mit einer Basis $(dx^i(p))_{i=1}^m$ für ein beliebiges Koordinatensystem x bei p .

Beweis (83)

$$dx^i(p) \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right] = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \delta_j^i$$

Der Rest folgt wie für TM .

84 Definition: „Frame“

Sei (U, x) ein Koordinatensystem für M . Dann wird das System der Vektorfelder in $U: (\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p)_{p \in U}$ wird *frame* für TM über U genannt.

85 Definition: „1-Form“

Das Analogon zu Vektorfeldern sind 1-Formen: Eine glatte 1-Form ω ist ein glatter Schnitt von $\pi^*: T^*M \rightarrow M$, das heißt $\omega \in C^\infty(M, T^*M)$ mit $\pi^* \circ \omega = \text{id}_M$.

86 Definition: „Menge von Vektorfeldern, 1-Formen“

Die Menge der glatten Vektorfelder über M wird als $\tau^1(M)$ und die der glatten 1-Formen als $\lambda^1(M)$ bezeichnet.

87 Bemerkung:

Ist $X \in \tau^1(M)$, $\omega \in \lambda^1(M)$ so ist $\omega[X] \in C^\infty(M)$ und wir können für eine beliebige glatte Kurve $c: [0, 1] \rightarrow M$ ein Integral definieren:

$$\int_c \omega := \int_0^1 \omega(c(t))[c'(t)] dt$$

2.3.1 Differenzierbare Abbildungen

1. $C^\infty(M)$ ist immer ein großer Raum, denn $C_c^\infty(U)$ ist unendlich-dimensional für jede offene Menge $U \neq \emptyset$ (abschneide Funktionen).
2. Zerlegung der 1

88 Definition: „Parakompaktheit“

Ein topologischer Raum X wird *parakompakt* genannt, wenn jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt.

89 Lemma: Parakompaktheitsbedingung

Sei M ein zweit-abzählbarer, lokal kompakter Hausdorffraum, zum Beispiel eine glatte Mannigfaltigkeit, so ist M parakompakt.

Beweis (89)

1. M besitzt eine abzählbare Basis von offenen Mengen mit kompaktem Abschluss (man nehme eine beliebige abzählbare Basis und wähle die Mengen mit kompaktem Abschluss aus). Sei $(V_j)_{j=1}^\infty$ eine solche Basis.
2. Nun konstruieren wir Mengen $G_i, i \in \mathbb{N}$ so, dass \bar{G}_i kompakt ist und

$$\forall i \in \mathbb{N}: \bar{G}_i \subset G_{i+1}$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i = M$$

Ist $G_1 := V_1$, so ist \bar{G}_1 kompakt. Haben wir nun G_i bereits konstruiert, so setzen wir

$$G_{i+1} := \bigcup_{k=1}^{j_{i+1}} V_k$$

$$j_{i+1} = \min \left\{ K \geq i+1 \mid \bigcup_{j=1}^K V_j \supset \bar{G}_i \right\}$$

3. Wähle die kompakte Menge $W_i := \bar{G}_{i+1} \setminus G_i$ und eine offene Umgebung $Z_i := G_{i+2} \setminus \bar{G}_{i+1}$. Dann ist $\mathcal{U}_i = (U \cap Z_i)_U$ eine offene Überdeckung von W_i , enthält also insbesondere eine endliche Teilüberdeckung $(U_{l_i} \cap Z_i)_{l_i=1}^{k_i}$. Sei nun $p \in W_i$ und U_p eine Umgebung aus der endlichen Teilüberdeckung. Dann konstruieren wir $\psi_p \in C^\infty(M)$ sodass $\text{supp } \psi_p \subset U_p$ und $\psi_p(q) = 1$ für alle $q \in U'_p \subset U_p$. (U'_p) ist eine weitere offene Überdeckung von W_i und besitzt somit wiederum eine endliche Teilüberdeckung $(U'_r)_{r=1}^{r_i}$.

Betrachte alle Funktionen die induktiv auf diese Weise konstruiert werden können. Sie ergeben eine abzählbare Menge (ψ_k) wobei ψ_k für p_k und $\text{supp } \psi_k \subset U_{p_k}$ ist erzeugt wurde. Dann ist $(U_{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$ die benötigte Verfeinerung.

90 Definition: „Zerlegung der Eins“

Ein System von Funktionen $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}, \phi_j \in C_c^\infty(M)$ mit

1. $\forall j \in \mathbb{N}: 0 \leq \phi_j \leq 1$
2. $\forall j \in \mathbb{N} \exists i_j \in \mathbb{N}: \text{supp } \phi_j \subset U_{i_j} \in \mathcal{U}$
3. $\sum_{j \in \mathbb{N}} \phi_j = 1$

heißt eine der offenen Überdeckung \mathcal{U} untergeordnete Zerlegung der Eins.

91 Satz: Zerlegung der Eins

Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M die lokal endlich ist, das heißt jeder Punkt von M besitzt eine Umgebung die nur endlich viele Elemente von \mathcal{U} schneidet. Dann gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

Beweis (91) Wir haben bereits eine abzählbare Familie von Funktionen (ψ_i) mit lokal endlichem und kompaktem Support. Aber

$$\psi := \sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_i \geq 1 \Rightarrow \psi^{-1} \in C^\infty(M)$$

Also setzen wir

$$\phi_i := \frac{\psi_i}{\psi} \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i = 1$$

92 Definition: „Rang einer Abbildung“

Für eine Abbildung $f \in C^\infty(M_1^{m_1}, M_2^{m_2})$ mit Koordinaten x_1 und x_2 bei $p \in M_1$ bzw. $f(p)$ ist der Rang definiert als:

$$\text{rk } f(p) := \text{rk}(x_2 \circ f \circ x_1^{-1})(x_1(p))$$

Dies ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

93 Definition: „Singulär, Regulär“

Ein Punkt $p \in M$ wird *regulär* genannt, falls $\text{rk } f = m_2 \Leftrightarrow df(p): T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2$ ist surjektiv. Andernfalls wird p *singulärer* oder *kritischer Punkt* genannt. Ein Wert $q = f(p)$ wird entsprechend *regulärer Wert* oder *kritischer Wert* genannt.

94 Definition: „Degeneriertheit“

Sei $f \in C^\infty(M)$ und $p \in M$ ein kritischer Punkt. Dann heißt p *nicht degeneriert*, wenn die quadratische Form zu diesem Punkt $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p))_{i,j}$ nicht-degeneriert ist, das heißt 0 liegt im Spektrum der quadratischen Form.

Dies ist wiederum unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

95 Satz: Morse Lemma

Sei $p \in M$ ein kritischer, nicht-degenerierter Punkt von $f \in C^\infty(M)$. Dann gibt es Koordinaten x bei p sodass

$$f(q) = f(p) - \sum_{j=1}^{r(p)} (x^j)^2 + \sum_{j=r(p)+1}^n (x^j)^2$$

Die Zahl $r = r(f, p)$ hängt nicht von der Wahl der Koordinaten ab.

Beweis (95) siehe zum Beispiel [Lan96]

96 Korollar:

Nicht-degenerierte, kritische Punkt sind isoliert.

97 Definition: „Morsefunktion“

$f \in C^\infty(M)$ wird *Morsefunktion* genannt und $r(p)$ ist der *Morseindex* von f bei p .

98 Definition: „Submersion, Immersion, Diffeomorphismus, Einbettung“

Eine Abbildung $f: M_1^{m_1} \rightarrow M_2^{m_2}$ wird *Submersion* bei p genannt, wenn $\text{rk } f(p) = m_2 \leq m_1$; *Immersion*, wenn $\text{rk } f(p) = m_1 \leq m_2$ und ein *lokaler Diffeomorphismus*, wenn $\text{rk } f(p) = m_1 = m_2$. f wird *Einbettung* genannt, wenn es eine injektive Immersion ist und ein Homöomorphismus auf sein Bild.

99 Satz: Rang Satz

Habe $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ den konstantem Rang k . Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ Koordinaten x_1 für M_1 bei p und x_2 für M_2 bei $f(p)$ sodass

$$x_2 \circ f \circ x_1^{-1}(x^1, \dots, x^{m_1}) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$$

100 Definition: „Nullmengen auf einer Mannigfaltigkeit“

Eine Menge $X \subset M^m$ hat das Maß 0, falls $x(X) \subset \mathbb{R}^m$ das Maß 0 hat für alle Koordinaten x der differenzierbaren Struktur auf M .

101 Satz:

Habe $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ den konstanten Rang k .

1. Ist f surjektiv, so ist es eine Submersion. ($k = m_2 \leq m_1$)
2. Ist f injektiv, so ist es eine Immersion. ($k = m_1 \leq m_2$)
3. Ist f bijektiv, so ist es ein Diffeomorphismus. ($k = m_1 = m_2$)

Beweis (101)

1. Angenommen f ist surjektiv, aber $k < m_2$, dann ist

$$x_2 \circ f \circ x_1^{-1}(x^1, \dots, x^{m_1}) = (x^1, \dots, x^k, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_2-k>0})$$

Das heißt das Bild von $x_2 \circ f \circ x_1^{-1}$ einer Menge $x_1(U_p \cap f^{-1}(U_{f(p),j}))$ hat das Maß 0 in \mathbb{R}^{m_2} . Also hat $f(M)$ das Maß 0 nach Betrachtung einer abzählbaren Überdeckung von M_1 und M_2 durch Koordinatenumgebungen. Somit kann f nicht surjektiv sein.

2. Angenommen f ist injektiv mit konstantem Rang $k \leq m_1, m_2$. Ist $k \neq m_1 \leq m_2$ so ist $k < m_1$ und für jeden Punkt $p \in M$ können wir Koordinatensysteme x_1, x_2 finden, sodass für $|x| < \varepsilon$:

$$x_2 \circ f \circ x_1^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$$

Ist $k < m_1$ kann diese Abbildung nicht injektiv sein, im Widerspruch zur Annahme.

3. folgt aus den vorherigen beiden Aussagen.

2.3.2 Eingebettete Untermannigfaltigkeiten

102 Definition: „Eingebettete Untermannigfaltigkeit“

Ist $f: M_1 \rightarrow M_2$ eine glatte Einbettung dann ist $j(M)$ mit der induzierten differenzierbaren Struktur die *eingebettete Untermannigfaltigkeit*.

103 Lemma:

Die folgenden Bedingungen für eine Abbildung $j \in C^\infty(M_1, M_2)$ sind äquivalent:

1. j ist eine Einbettung.
2. Für jeden Punkt $j(p) \in j(M)$ gibt es Koordinaten $x: U_x \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ bei $j(p)$ sodass

$$x: (j(M) \cap U_x) \ni q \mapsto (x^1(q), \dots, x^{m_1}(q), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m_2}$$

2.3.3 Niveaumengen

Was kann für $f \in C^\infty(M_1, M_2), p_2 \in M_2$ über $f^{-1}(p_2)$ gesagt werden?

104 Satz:

Sei $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ eine Abbildung konstanten Rangs k . Dann gilt für alle $p_2 \in M_2$:

- $f^{-1}(p_2)$ ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M_1 der Dimension $m_1 - k$.
- $T_{p_1} f^{-1}(p_2) = \ker df(p)$

Beweis (104) Bei $p_1 \in f^{-1}(p_2)$ können wir Koordinaten x für M_1 finden, sodass $x: f^{-1}(p_2) \cap U_x \ni q \mapsto (x^1(q), \dots, x^k(q), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m_1}$ **Satz 99 (Rang Satz)**.

105 Bemerkung:

Für $k = m_2$ erhalten wir **Satz 57 (Satz vom regulären Wert)**.

3 Vektorfelder

3.1 Algebraische Eigenschaften

$$\tau^1(M) = \{ X \in C^\infty(M, TM) \mid \pi_M^{TM} \circ X = \text{id}_M \}$$

In lokalen Koordinaten $x: U_x \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist

$$X(p) = \sum_{i=1}^m X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, X^i \in C^\infty(U_x)$$

äquivalent zu $X|_{U_x} \in \tau^1(U_x)$. Glatte Vektorfelder $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ auf M sind lineare partielle Differentialoperatoren erster Ordnung. $\tau^1(M)$ ist ein Links-Modul über $C^\infty(M)$.

Gibt es ein Produkt von Vektorfeldern? Das heißt eine (\mathbb{R} -) bilineare Abbildung

$$\tau^1(M) \times \tau^1(M) \ni (X, Y) \mapsto [X, Y] \in \tau^1(M)$$

106 **Definition: „Lie-Klammer“**

Für $X, Y \in \tau^1(M)$ sei

$$\begin{aligned} [X, Y]f &:= X(Yf) - Y(Xf) = \left(\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{i,j} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) f \\ &= \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} f \end{aligned}$$

die Lie-Klammer.

107 **Lemma: Algebraische Eigenschaften der Lie-Klammer**

Seien $X, Y, Z \in \tau^1(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$, dann gilt:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$
2. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*Jacobi-Identität*)

Funktorielle Eigenschaften Sei $\phi: M \rightarrow N$ wie wird dann $\tau^1(M)$ auf $\tau^1(N)$ abgebildet. Wir wissen, dass $d\phi(p): T_p M \rightarrow T_p N$ linear ist und für $X \in T_p M$, $f \in C^\infty(N)$ ist

$$d\phi(p)[X]f = X(f \circ \phi) =: X(\phi^* f) =: \phi_* X(f)$$

Dabei nennt man ϕ^* *pull-back* und ϕ_* *push-out*.

Achtung Im Allgemeinen ist $\phi_* X \notin \tau^1(N)$, wohl aber, wenn ϕ ein Diffeomorphismus ist. Das heißt in diesem Spezialfall kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\phi_*} & TN \\ X \downarrow \pi^{TM} & \phi_* X & \uparrow \pi^{TN} \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

108 **Definition: „Verwandtschaft“**

Für $\phi \in C^\infty(M, N)$, $X \in \tau^1(M)$, $Y \in \tau^1(N)$ heißt ϕ -*verwandt*, wenn

$$\begin{aligned} d\phi[X] &= Y \circ \phi \\ \Leftrightarrow X(f \circ \phi) &= (Y \circ \phi)f = Yf \circ \phi \end{aligned}$$

Das bedeutet das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\phi_*} & TN \\ X \uparrow & & Y \uparrow \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

109 **Lemma: Verwandtschaftsinvarianz der Lie-Klammer**

Seien $X_1, X_2 \in \tau^1(M)$ sowie $Y_1, Y_2 \in \tau^1(N)$ und X_i mit Y_i ϕ -verwandt für $i = 1, 2$. Dann sind auch $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ ϕ -verwandt.

Beweis (109) Sei $f \in C^\infty(N)$, dann ist

$$\begin{aligned} [X_1, X_2](f \circ \phi) &= X_1(X_2(f \circ \phi)) - X_2(X_1(f \circ \phi)) = X_1(Y_2 f \circ \phi) - X_2(Y_1 f \circ \phi) \\ &= Y_1(Y_2 f) \circ \phi - Y_2(Y_1 f) \circ \phi = [Y_1, Y_2]f \circ \phi \end{aligned}$$

Beispiel Es sei ϕ eine Submersion und X_1, X_2 überall tangential an die Fasern von ϕ (das heißt Untermannigfaltigkeit $\phi^{-1}(q)$, $q \in N$). Dann ist auch $[X_1, X_2]$ tangential an die Fasern, denn X_i ist ϕ -verwandt mit $Y_i = 0$ und $T_p \phi^{-1}(q) = \text{Ker } d\phi(p)$.

110 **Definition: „Lie-Algebra“**

Es sei E ein \mathbb{R} -Vektorraum mit einer bilinearen Abbildung $E \times E \ni (e_1, e_2) \mapsto [e_1, e_2]$ so dass Bedingung 1 und 3 aus 107 erfüllt sind. Dann heißt E *Lie-Algebra*.

Beispiele

1. $\tau^1(M)$ ist eine Lie-Algebra der Dimension ∞ .

2. Jeder \mathbb{R} -Vektorraum E wird eine Lie-Algebra mit der Definition $[e_1, e_2] = 0$. Diese sind die *abelschen Lie-Algebren*.
3. Der dreidimensionale Raum mit dem Kreuzprodukt (\mathbb{R}^3, \times) ist eine Lie-Algebra.
4. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m^2}$ ist eine Lie-Algebra mit dem Kommutator $[A, B] = AB - BA$.

3.2 Integralkurven

Wie löst man die Gleichung $Xf = g$ mit $f, g \in C^\infty(M)$ nach f für gegebene X und g ?

Beispiel $M = \mathbb{R}^m$, $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $x = (x^1, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x) = g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, y) = g(x^1, y)$$

$$f(x^1, y) = f(0, y) + \int_0^{x^1} g(t, y) dt$$

Dann wird $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_y$ von $c_y(t) := y + te_1$ erzeugt. Also: eine glatte Kurve $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ erzeugt $X \in \tau^1(M)$ längs c gdw. $X(c(t))f = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ c)(t)$, $|t| < \varepsilon$.

111 Definition: „Integralkurve“

Eine Kurve $c_p: (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ heißt *Integralkurve* von $X \in \tau^1(M)$ gdw.

1. $c_p'(t) = X(c_p(t)) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(f \circ c_p(t)) = X(c_p(t))f$
2. $c_p(0) = p$.

Diskussion Sei $x: U_x \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte, $c_p^i := x^i \circ c_p$ so ist

$$c_p'(t) = \sum_{i=1}^m (c_p^i)'(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{c_p(t)}$$

denn

$$c_p'(t)(x^i) := \frac{d}{dt}(x^i \circ c_p)(t) = c_p^{i'}(t)$$

Das heißt mit $x_* X \in \tau^1(x(U_x))$ gilt $(x \circ c_p)'(t) = x_* X(x \circ c_p(t))$, $x \circ c_p(0) = x(p) = 0$.

Wir haben also die gewöhnliche autonome Differentialgleichung $f'(t) = x_* X(f(t))$, $f(0) = 0$ zu lösen.

112 **Satz:**

Sei $X \in \tau^1(M)$, dann gibt es zu $p \in M$ eine offene Umgebung U_p und $\varepsilon > 0$ so, dass die Abbildung

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p \ni (t, q) \mapsto c_q(t) \in M$$

wohldefiniert, d.h.

1. $c_q(t)$ ist eindeutig bestimmt.
2. $c_q(t)$ existiert für $|t| < \varepsilon$ und alle $q \in U_p$.

und glatt ist.

113 **Korollar:**

Zu jedem $X \in \tau^1(M)$ und jedem p existiert eine *maximale Integralkurve* $c_p: (a_p, b_p) \rightarrow M$, $-\infty \leq a_p < 0 < b_p \leq \infty$, $c_p'(t) = X(c_p(t))$, $c_p(0) = p$.

Beweis (113) (Skizze)

Es gilt $c_p(t_0 + t) = c_{p(t_0)}(t)$. Überschneiden sich also zwei Integralkurven, so ergibt ihre Vereinigung wegen der Eindeutigkeit eine neue Integralkurve. Mit Zorns Lemma folgt dann die Behauptung.

Bemerkung Es seien c_{p_1}, c_{p_2} maximale Integralkurven mit $c_{p_1}(t_1) = c_{p_2}(t_2)$, so ist $c_{p_1}(t) = c_{p_2}(t + t_0)$. Das bedeutet die Integralkurven von X zerlegen M in immergierte Untermannigfaltigkeiten.

Beispiele

1. Ist in \mathbb{R}^m , $X(p) = a \in \mathbb{R}^m$ ein konstantes Vektorfeld, dann ist $c_p^x(t) = p + ta$ für alle $p \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $a_p = -\infty, b_p = \infty$ für alle p .
2. $X \in \tau^1(M)$, $X(p) = 0$, dann ist $c_p(0) = p$, $\frac{d}{dt} \Big|_{t=c=0} f \circ c_p(t) = c_p'(0)f = X(p)f = 0$. $c_p'(0) = X(p)$.
3. Lineare Vektorfelder im \mathbb{R}^m : $X \in L(\mathbb{R}^m) \subset C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Für jedes lineare Vektorfeld ist $x = 0$ eine Nullstelle, also eine Integralkurve. Wie sieht eine Integralkurve im allgemeinen aus? $c_y^x(t)$, sodass $c_y^x(0) = y$, $(c_y^x)'(t) = X(c_y^x(t))$ oder $x'(t) = X(x(t))$ mit der Lösung

$$\begin{aligned} c_y^x(t) &= e^{tX}(y) \\ \Rightarrow (c_y^x)'(t) &= X(e^{tX}(y)) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$e^{tX} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} X^j$$

dies konvergiert wegen

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} X^j \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j}{j!} \|X^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(|t| \|X\|)^j}{j!}$$

außerdem gilt $Xe^{tX} = e^{tX}X \Leftrightarrow [X, e^{tX}] = 0$. Alle Integralkurven sind gegeben durch $e^{tX}(y)$, $y \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$.

Beispiel $m = 2$, $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ bzgl. $\{e_1, e_2\}$. Integralkurven durch $y = (y^1, y^2)$ ist

$$e^{t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}(y) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} y^1 \\ e^{t\lambda_2} y^2 \end{pmatrix}$$

114 Definition: „Vollständige Vektorfelder“

Ein Vektorfeld $X \in \tau^1(M)$ heißt *vollständig*, wenn $\forall p \in M: a_p = -\infty, b_p = \infty$. Dann setzen wir

$$\phi_t^X(p) = c_p(t), t \in \mathbb{R}, p \in M$$

115 Satz:

Sei $X \in \tau^1(M)$ vollständig, dann gilt:

1. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist ϕ_t^X ein Diffeomorphismus.
2. $\phi_0^X = \text{id}_M$, $\phi_{t_1}^X \circ \phi_{t_2}^X = \phi_{t_1+t_2}^X = \phi_{t_2}^X \circ \phi_{t_1}^X$ insbesondere $(\phi_t^X)^{-1} = \phi_{-t}^X$.

Diskussion

1. $(\phi_t^X)_{t \in \mathbb{R}}$ heißt der *Fluss* von X . Jedes System $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ von Homöomorphismen bzw. Diffeomorphismen einer topologischen bzw. differenzierbaren Mannigfaltigkeit heißt ein *dynamisches System*. Dies führt zur Systemtheorie.
2. Ist $\Phi = (\phi_t)$ ein dynamisches System, $\Phi \subset \text{Diff}(M)$, dann ist Φ eine abelsche Untergruppe von $\text{Diff}(M)$ parametrisiert über \mathbb{R} oder eine 1-parametrische Untergruppe von $\text{Diff}(M)$.
3. Der Fluss (ϕ_t^X) bildet ein wichtiges Werkzeug der Differentialtopologie, zum Beispiel um (Unter-)Mannigfaltigkeiten zu verformen.
4. Im allgemeinen sind Flüsse nur lokal definiert. Dieselben Ideen führen zu lokalen Diffeomorphismen.

Weitere Beispiele

1. Eine Integralkurve c_p von X heißt *periodisch*, wenn
 - a) $a_p = -\infty, b_p = \infty$
 - b) $c_p(t + T) = c_p(t)$ für $T > 0$.
2. Es gibt aber auch dichte Orbits, das heißt 1-dimensionale immergierte Integralkurven, deren Abschluss die gesamte Mannigfaltigkeit ist. Wählt man beispielsweise $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und betrachtet die Projektion einer Gerade in \mathbb{R}^2 mit irrationaler Steigung. So liegt diese Kurve dicht im Torus. Man nennt dies den *Kronecker-Fluss*.

116 Lemma:

Sei $X \in \tau^1(M), X(p) \neq 0$. Dann gibt es ein Koordinatensystem $x: U_x \rightarrow \mathbb{R}^m$ zentriert bei p so, dass $\forall q \in U_p: X(q) = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_q$.

Beweis (116) Wähle ein Koordinatensystem $y: \tilde{U}_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ und die Umgebung \tilde{U}_p mit $0 \notin X(\tilde{U}_p)$ so, dass $X(p) = \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_p$. Dann setzen wir für $y = (y^1, y')$ $\in \mathbb{R}^m$ und

$$x^{-1}(y^1, y') = \phi_{y'}(y^{-1}(0, y'))$$

Dieses x hat ein invertierbares Differential in p und somit wurde die Behauptung für eine genügend kleine Umgebung von p bewiesen.

3.3 Lie-Gruppen

Für die Beweise dieses Kapitels siehe [War83, Kapitel 3].

117 Definition: „Lie-Gruppe“

Eine *Lie-Gruppe* ist eine Gruppe G die zugleich eine differenzierbare Struktur besitzt so, dass die Abbildung $G \times G \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1} \in G$ differenzierbar ist.

Beispiele

1. $(\mathbb{R}^m, +)$ ist eine abelsche Lie-Gruppe, denn $(x, y) \mapsto x - y$ ist differenzierbar.
2. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit einer komplexen Struktur, das heißt es gibt eine Abbildung $J \in L(\mathbb{R}^2)$ mit $J^2 = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$. Dazu gibt es außerdem eine reelle Struktur $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ die mit J antikommutiert: $RJ + JR = 0$.
3. (\mathbb{C}, \cdot) ist eine abelsche Gruppe, aber auch $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ mit $(z_1, z_2) \mapsto z_1 \cdot z_2$ glatt.

118 **Definition: „Komplexe Mannigfaltigkeit“**

M sei eine C^∞ -Mannigfaltigkeit der Dimension $2m$. Dann heißt M *komplexe Mannigfaltigkeit* der Dimension m gdw.

$$x_1 \circ x_2^{-1} \in \text{Diff}(x_2(U_{x_2} \cap U_{x_1}), x_1(U_{x_1} \cap U_{x_2}))$$

holomorph ist bzgl. der komplexen Struktur $J_m = \bigoplus_m J$ auf $(\mathbb{R}^2)^m$, d.h.

$$[d(x_1 \circ x_2^{-1}), J_m] = 0$$

Dann können wir $x^j + iy^j = z^j \in \mathbb{C}$ als Koordinaten einführen.

Das Hauptbeispiel $G = \text{GL}(M, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) = M(m, \mathbb{R})$. Dann interessiert uns:

1. Was ist das Tangentialbündel $T \text{GL}(m, \mathbb{R})$.

Für $H \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$ gibt es eine Umgebung $U \subset \text{GL}(m, \mathbb{R}) \subset M(m, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{m^2}$. Also ist $T_H \text{GL}(m, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{m^2} \simeq M(m, \mathbb{R})$.

$$M(m, \mathbb{R}) \ni A \mapsto \sum_{i,j=1}^m A^{ij} \left. \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \right|_H \in T_H \text{GL}(m, \mathbb{R}) = T_H M(m, \mathbb{R})$$

Wie können wir nun einen Tangentialvektor bei I_m darstellen?

Zum Beispiel: $t \mapsto I_m + tA, |t| < \varepsilon = \varepsilon(A)$ oder besser: $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$ denn

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

ist eine Integralkurve des linearen Vektorfelds $x \mapsto Ax$ auf \mathbb{R}^m . Der Vorteil hieran ist, dass die e^{tA} eine Untergruppe von $\text{GL}(m, \mathbb{R})$ bilden.

119 **Definition: „Operatoren“**

Für $H \in G := \text{GL}(m, \mathbb{R})$ definieren wir Transformationen auf G folgendermaßen:

$L_H(K) := H \cdot K$	Linksmultiplikation
$R_H(K) := K \cdot H$	Rechtsmultiplikation
$C_H(K) := H \cdot K \cdot H^{-1}$	Konjugation

Dabei sind L_H, R_H und C_H Diffeomorphismen.

$$L_H(1) = H \Rightarrow dL_H: T_1 G \rightarrow T_H G$$

Betrachte das folgende, nicht notwendigerweise glatte Vektorfeld:

$${}^L X(H) := dL_H(1)[X], X \in T_1 G$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} {}^L X(HK) &= dL_H(K) (dL_K(1)[X]) = dL_H(K)[{}^L X(K)] \\ &\Rightarrow {}^L X \circ L_H = dL_H[{}^L X] \end{aligned}$$

120 **Definition: „Linksinvarianz“**

Ein Vektorfeld X auf G wird *linksinvariant* genannt, wenn es L_H -verwandt zu sich ist für alle H , d.h. $\forall H \in G: dL_H[X] = X \circ L_H$.

121 **Lemma:**

Linksinvariante Vektorfelder auf $GL(m, \mathbb{R})$ sind glatt.

Beweis (121) Sei $f \in C^\infty(GL(m, \mathbb{R}))$, dann wollen wir zeigen, dass $Xf \in C^\infty(GL(m, \mathbb{R}))$ ist. Mit $X := {}^L X_0$ gilt:

$$\begin{aligned} Xf(H) &= X \circ L_H(f)(1) = dL_H(1)[X_0](f) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(L_H e^{tX_0}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(H e^{tX_0}) \end{aligned}$$

und dies ist glatt in H .

122 **Korollar:**

Linksinvariante Vektorfelder sind glatt und vollständig, da der Fluss folgendermaßen gegeben ist:

$$\phi_t^{LX}(H) = L_H e^{tX}$$

123 **Lemma:**

Der Raum der linksinvarianten Vektorfelder auf $GL(m, \mathbb{R})$ kann mit $T_1 GL(m, \mathbb{R}) \simeq M(m, \mathbb{R})$ identifiziert werden. Also ist $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) := T_1 GL(m, \mathbb{R})$ eine Lie-Algebra mit der Lie-Klammer:

$$[X, Y] := [{}^L X, {}^L Y](1) = {}^L [X, Y](1)$$

124 **Definition: „Lie-Algebren zu Lie-Gruppen“**

Für eine Lie-Gruppe G ist $T_1 G$ die zugehörige Lie-Algebra, wir schreiben dafür \mathfrak{g} .

125 **Satz:**

Auf jeder Lie-Gruppe sind linksinvariante Vektorfelder glatt und vollständig.

Strukturelles Problem $G \rightarrow \mathfrak{g}$ ist wohldefiniert. Aber diese Abbildung ist sogar injektiv und surjektiv mit passenden Einschränkungen.

126 **Korollar:**

Es gibt einen Diffeomorphismus $GL(m, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \ni (H, X) \mapsto {}^L X(H) \in TGL(m, \mathbb{R})$. Wir sagen: das Tangentialbündel ist trivial.

Betrachten wir den Diffeomorphismus $C_H(K) = HKH^{-1}$. Dann ist $C_{H_1} \circ C_{H_2} = C_{H_1 H_2}$ und $C_H(1_G) = 1_G$ also ist C_H ein Gruppenhomomorphismus. Wir nennen $\text{Ad}_H := dC_H(1) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$

die adjungierte Abbildung zu H . Dann ist $\text{Ad}: G \in H \mapsto \text{Ad}_H \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ein Homomorphismus und glatt. Dies ist eine *Repräsentation* von G .

Weiter ist $\text{Ad}(1_G) = I_{\mathfrak{g}}$. Dann definieren wir $\text{ad} := d\text{Ad}(1_G): \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$.

127 **Lemma:**

Für $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$$

Betrachten wir jetzt die orthogonale Gruppe: $O(m) := \{ A \in \text{GL}(m, \mathbb{R}) \mid A^T A = I_m \}$. Dann können wir zeigen

1. $O(m)$ ist eine Gruppe.
2. $O(m)$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

Um dies zu zeigen, verwenden wir **Satz 57 (Satz vom regulären Wert)**. Betrachten wir zunächst die Funktion

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \ni A \xrightarrow{\Phi} A^T A \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^m)$$

Wähle ein $B \in O(m)$ und analysiere

$$d\Phi(B): \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^m)$$

Nimm einen Tangentialvektor $T \in T_A \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ dann gilt

$$\begin{aligned} d\Phi(B)[T] &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(B + tT) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (B + tT)^T (B + tT) \\ &= B^T T + T^T B \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

Sei $C \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^m)$, $C = C^T$ und wähle $T = \frac{1}{2}BC$ so gilt

$$d\Phi(B)\left[\frac{1}{2}BC\right] = \frac{1}{2}(B^T BC + C^T B^T B) = C$$

Es handelt sich also um einen regulären Punkt. Außerdem ist Φ eine Submersion und somit ist $O(m)$ eine Mannigfaltigkeit und die Gruppenoperationen sind glatt.

Berechnen von Integralkurven Ist E ein Vektorraum über \mathbb{K} so kann man ein lineares Vektorfeld A immer in S und N , Polynome über A , zerlegen:

$$A = S(A) + N(A)$$

Mit $SN = NS$, N ist nilpotent und S ist *halbeinfach*, das heißt wenn $E' \subset E$ S -invariant ist, $S(E') \subset E'$, so gibt es ein S -invariantes E'' sodass $E = E' \oplus E''$. S wird zerlegt als $\lambda I_{E'} \oplus S|_{E''}$.

Regeln

1. $He^{tA}H^{-1} = e^{tHAH^{-1}}$
2. $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ falls $[A, B] = 0$.

Bemerkung Für ein nilpotentes N ist e^{tN} ein Polynom von t der Ordnung k wenn $N^{kH} = 0$.
 Speziell für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$: Hier kann jedes A bis auf Konjugation in Summanden der Form

$$A_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_m + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{2m}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_m(\alpha) & -\beta I_m \\ \beta I & A_m(\alpha) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_m(\alpha) & 0 \\ 0 & A_m(\alpha) \end{pmatrix}}_{A^{(1)}} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}}_{A^{(2)}}$$

Beachte: $[A^{(1)}, A^{(2)}] = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} =: J \Rightarrow J^2 = -I_{2m}$$

$$e^{tJ} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!} (-1)^j I_{2m} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} (-1)^j J = \begin{pmatrix} \cos \rho t I_m & -\sin \beta t I_m \\ \sin \rho t I_m & \cos \beta t I_m \end{pmatrix}$$

Einige klassische Lie-Gruppen und -Algebren über \mathbb{R} und \mathbb{C}

$GL(m, \mathbb{R})$	$\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$
$GL(m, \mathbb{C})$	$\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$
$O(m, \mathbb{R}), \dim O(m) = \frac{m(m+1)}{2}$	$\mathfrak{o}(m, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \mid A^T = -A\}$
$O(m, \mathbb{C})$	$\mathfrak{o}(m, \mathbb{C})$
$U(m) = U(m, \mathbb{C}) = \{T \in GL(m, \mathbb{C}) \mid T^T T = I_m\}$	
$SL(m, \mathbb{R}) = \{A \in GL(m, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ (nicht kompakt!)	$\mathfrak{sl}(m, \mathbb{R})$
$SL(m, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(m, \mathbb{C})$
$SU(m) = U(m) \cap SL(m, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(m)$
$SO(m) = O(m) \cap SL(m, \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(m)$
$Sp(m, \mathbb{R}) = \{T \in GL(2m, \mathbb{R}) \mid T^T J_m T = J_m\}$	$\mathfrak{sp}(m, \mathbb{R})$
$Sp(m, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$

Mit $J_m = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$. Sp sind die *symplektischen Gruppen*

128 Definition: „komplexe Lie-Gruppe“

Eine *komplexe (analytische) Lie-Gruppe* ist eine reell analytische Lie-Gruppe mit einem komplexen Atlas sodass $\mu: (x, y) \mapsto x \cdot y$ und $\nu: x \mapsto x^{-1}$ ebenfalls komplex analytisch sind.

129 **Definition: „Exponentialabbildung“**

Wir definieren die glatte Abbildung:

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G, X \mapsto \exp(X) := \phi_1^L X(1_G)$$

Bemerkung $d\exp(0) = I_{\mathfrak{g}}$, das heißt \exp ist ein Diffeomorphismus auf einer offenen Umgebung U von $0 \in \mathfrak{g}$.

130 **Definition: „Lie-Homomorphismus“**

Einen glatten Homomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ zwischen Lie-Gruppen G und H nennen wir *Lie-Homomorphismus*.

131 **Lemma: Eigenschaften der Exponentialabbildung**

1. Seien G, H Lie-Gruppen mit den Lie-Algebren $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ und sei die Abbildung $\phi: G \rightarrow H$ ein Lie-Homomorphismus. So gilt

$$\exp(d\phi(0)[X]) = \phi(\exp(X))$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\phi} & \mathfrak{h} \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

2. $\text{Ad}(\exp(X)) = e^{\text{ad}(X)}$
3. $C_{\mathfrak{h}}(\exp(X)) = \exp(\text{Ad}_{\mathfrak{h}}(X))$

Eine Lie-Gruppe hat eine zugrundeliegende Gruppe, welche eine topologische Gruppe mit einer zweitabzählbaren, lokal-euklidischen Topologie.

Hilberts 5. Problem (1900) Besitzt jede solche topologische Gruppe eine Lie-Gruppenstruktur?

Dieses Problem wurde 1952 von Montgomery und Zippin gelöst:

Jede zweitabzählbare, lokal-euklidische topologische Gruppe, welche Hausdorff ist, besitzt eine eindeutig bestimmte differenzierbare Struktur, welche sie zu einer Lie-Gruppe macht.

132 **Lemma:**

Ein Gruppenhomomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ zwischen Lie-Gruppen ist bereits glatt (also ein Lie-Homomorphismus) wenn er stetig ist.

Beachte Betrachte eine Abbildung $j: M \rightarrow N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Falls j eine injektive Immersion ist, nennen wir das Paar (M, j) *Untermannigfaltigkeit* von N . Ist j eine glatte Einbettung, nennen wir es *eingebettete Untermannigfaltigkeit*.

133 Definition: „Lie-Untergruppe“

Sei G eine Lie-Gruppe und H eine Untergruppe mit einer Injektion $i: H \rightarrow G$. Dann ist (H, i) genau dann eine *Lie-Untergruppe*, wenn H eine Lie-Gruppe und (H, i) eine Untermannigfaltigkeit von G ist.

134 Satz:

1. Sei (H, i) eine Lie-Untergruppe. Dann ist (H, i) genau dann eine Untermannigfaltigkeit von G , wenn H abgeschlossen in G ist.
2. Sei G eine Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann gibt es einen ein-eindeutigen Zusammenhang zwischen den Lie-Unteralgebren von \mathfrak{g} und den zusammenhängenden Lie-Untergruppen von G .
3. Sei G eine Lie-Gruppe und H eine abstrakte Untergruppe mit einer differenzierbaren Struktur, sodass (H, i) eine Lie-Untergruppe von G ist. Dann gilt
 - Die differenzierbare Struktur ist eindeutig bestimmt.
 - Die Topologie stimmt mit der von i induzierten überein.

135 Satz:

1. Ein Lie-Homomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ ist genau dann eine Überlagerung, wenn $d\phi(1_G)$ ein Isomorphismus zwischen \mathfrak{g} und \mathfrak{h} ist.
2. Jede zusammenhängende Lie-Gruppe G besitzt eine einfach zusammenhängende Überlagerung $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ (die universelle Überlagerung) sodass π ein Lie-Homomorphismus ist und \tilde{G} eine Lie-Gruppe ist.
3. Seien G, H Lie-Gruppen mit den zugehörigen Lie-Algebren \mathfrak{g} und \mathfrak{h} und sei $\underline{\phi}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein Lie-Homomorphismus. Dann, falls G einfach zusammenhängend ist, so gibt es einen Homomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ sodass $d\phi = \underline{\phi}$.

4 Tensoren und Differentialformen

Siehe auch [War83, Kapitel 2].

4.1 Das Tensorkalkül

Im Folgenden bezeichnen V, W und E endlichdimensionale Vektorräume über \mathbb{K} . Mit $F(V, W)$ bezeichnen wir freien Vektorraum erzeugt von den Punkten in $V \times W$. (formale Linearkombinationen von $\{(v, w) \in V \times W\}$, nicht punktweise!). Dann sei $R(V, W)$ der Untervektorraum von $F(V, W)$ welcher von Elementen der folgenden Form erzeugt wird:

$$\begin{aligned} &(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ &(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ &a(v, w) - (av, w) \\ &a(v, w) - (v, aw) \end{aligned}$$

für $a \in \mathbb{K}, v_1, v_2, v \in V$ und $w_1, w_2, w \in W$.

136 Definition: „Tensorprodukt“

Das *Tensorprodukt* ist definiert als $W \otimes V := F(V, W)/R(V, W)$ mit $[(v, w)] =: v \otimes w$.

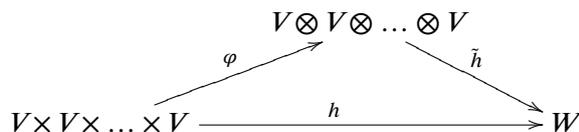
Nach diesen Definitionen gilt dann

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \qquad a(v \otimes w) = (av) \otimes w = v \otimes (aw)$$

Das Tensorprodukt ist also bilinear. Weiter Eigenschaften sind:

- $V \otimes W \simeq W \otimes V$ kanonisch
- Das Tensorprodukt $\varphi: V \times V \times \dots \times V \rightarrow V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ ist durch eine universelle Eigenschaft definiert:

Für jede multilineare Abbildung $h: V \times V \times \dots \times V \rightarrow W$ existiert eine eindeutige Abbildung $\tilde{h}: V \otimes V \otimes \dots \otimes V \rightarrow W$ sodass das folgende Diagramm kommutiert:



137 Lemma:

Seien V_1, V_2, V_3 Vektorräume, dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $i: (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \rightarrow V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ sodass $i((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$.

138 **Definition: „Tensorraum“**

Ist E ein Vektorraum, dann definieren wir

$$E_r^s := \bigotimes_{i=1}^r E \otimes \bigotimes_{i=1}^s E^*$$

als den *Tensorraum* vom Typ (r, s) und

$$T(E) = \bigoplus_{r,s \geq 0} E_r^s$$

als die *Tensoralgebra*.

Beispiel

$$u = u_1 \otimes \dots \otimes u_{r_1} \otimes u_1^* \otimes \dots \otimes u_{s_1}^*$$

$$v = v_1 \otimes \dots \otimes v_{r_2} \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_{s_2}^*$$

$$u \otimes v = u_1 \otimes \dots \otimes u_{r_1} \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{r_2} \otimes u_1^* \otimes \dots \otimes u_{s_1}^* \otimes v_1^* \otimes \dots \otimes v_{s_2}^*$$

Elemente v in E_r^s werden *homogen* vom Grad (r, s) genannt. Sie heißen *zerlegbar*, wenn sie sich in der Form

$$E_r^s := \bigotimes_{i=1}^r v_i \otimes \bigotimes_{i=1}^s v_i^*, \quad v_i \in E, v_i^* \in E^*$$

schreiben lassen.

139 **Definition: „symmetrische/antisymmetrische Tensoren“**

$$P_{sym}^{(k)}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

$$P_{asym}^{(k)}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in T_k(E) := \bigotimes_{i=1}^k E$$

$$\Lambda^k E = P_{asym}^{(k)} T_k(E)$$

$$\Lambda^0 E = \mathbb{K}, \Lambda E = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k E$$

Dies ist das *äußere Produkt*.

Beachte, dass für $\dim E < k$ gilt: $P_{asym}^{(k)}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = 0$.

140 **Satz:**

$\Lambda E = \bigotimes_{k=0}^n \Lambda^k E$, $n = \dim E$ ist eine assoziative Algebra unter dem Keilprodukt

$$\Lambda^{k_1} E \times \Lambda^{k_2} E \rightarrow \Lambda^{k_1+k_2} E, (w_1, w_2) \mapsto w_1 \wedge w_2 := c_{k_1, k_2} P_{asym}^{(k_1+k_2)}(w_1 \otimes w_2)$$

mit einer konstante $c_{k_1, k_2} = \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!k_2!}$. Es gilt dabei

$$w_1 \wedge w_2 = (-1)^{k_1 k_2} (w_2 \wedge w_1)$$

Insbesondere ist $\Lambda^{ev} E := \bigotimes_{k \geq 0} \Lambda^{2k} E$ abelsch.

141 **Definition: „innere Multiplikation“**

Sei $u \in \Lambda V$ und $\varepsilon(u) \in \text{End}(\Lambda V)$ mit $\varepsilon(u)v := u \wedge v, v \in \Lambda V$. Dann definieren wir $i(u) := \varepsilon'(u)$ als die *innere Multiplikation*.

Beispiel Eine Bilinearform g auf TM ist ein glatter Schnitt von $T^*M \otimes T^*M$. Ist diese Form symmetrisch und positiv definit, so ist $g[X, X](p) \geq 0$ und Gleichheit wird genau für $X = 0$ angenommen. Dies nennen wir eine *Riemannsche Metrik* auf M . Wir messen die Länge von Tangentialvektoren, somit

$$L(c) := \int_c \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt = \int_0^1 \sqrt{g(c(t))[c'(t), c'(t)]} dt$$

wobei $c: [0, 1] \rightarrow M$ ein regulärer, stückweise C^1 Weg ist.

Ist M zusammenhängend, so können wir folgendes bilden:

$$d_M(p, q) := \inf_{c \text{ von } p \text{ nach } q} L(c)$$

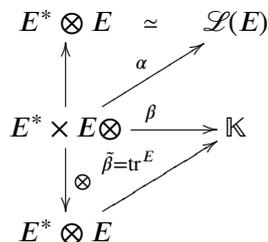
142 **Lemma:**

d_M ist eine Metrik auf M welche die Topologie von M generiert.

143 **Lemma:**

Es gibt Riemannsche Metriken.

Sei E ein endlicher Vektorraum. $\alpha(e^*, f)(e) = e^*(e)f, \beta(e^*, e) = e^*(e)$.



4.2 Tensorfelder und Differentialformen

$$\Lambda^j M := \Lambda^j T^* M = \bigcup_{p \in M} \Lambda^j T_p^* M \xrightarrow{\pi^{\Lambda^j}} M$$

die glatte Struktur induziert von einem Atlas auf M . Auf U_x haben wir für jeden Schnitt ω :

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_j \leq m} \omega_I(p) dx^I(p), \quad dx^I(p) = dx^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx^{i_j}(p)$$

und $u \in C^\infty(M, \Lambda^j M) \Leftrightarrow \forall I: \omega_I \in C^\infty(U_x)$.

144 Definition: „Differentialformen“

Die glatten Schnitte von $\Lambda^j M$ werden mit $\lambda^j(M)$ bezeichnet und $\lambda(M) := \bigoplus_{j=0}^m \lambda^j(M) \ni \omega = \omega^0 + \omega^1 + \dots + \omega^n$. $\lambda^0(M) = C^\infty(M)$. Sie werden auch glatte (j-)Differentialformen genannt. $\lambda(M)$ wird die äußere Algebra der Differentialformen genannt.

145 Lemma:

1. $\lambda(M)$ ist eine assoziative \mathbb{R} -Algebra unter äußerer Multiplikation.
2. Für $\omega_i \in \lambda^{j_i}(M)$ gilt $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{j_1 j_2} \omega_2 \wedge \omega_1$. (Superalgebra-Struktur)
3. Wir definieren die Involution ε_M auf $\lambda(M)$ als $\varepsilon_M|_{\Lambda^j T_p^* M} = (-1)^j \text{id}_{\Lambda^j T_p^* M}$.
4. Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $d: \lambda(M) \rightarrow \lambda(M)$ mit folgenden Eigenschaften:
 - a) $d\omega^0 = d\omega^0$ für $\omega^0 \in \lambda^0(M) \simeq C^\infty(M)$
 - b) $d \circ d = 0$
 - c) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + \varepsilon_M \omega_1 \wedge d\omega_2$

d wird das *äußere Differential* oder *Cartan Differential* genannt und $(\lambda(M), d)$ heißt *de Rham Komplex*.

Bemerkung Es ist hilfreich

$$\omega = fdg_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_k, f, g_i \in C^\infty(U)$$

zu schreiben, zum Beispiel

$$d\omega = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$$

und für $\omega = \omega_{I_0} dx^{I_0}$ erhalten wir

$$d\omega = d\omega_{i_0} \wedge dx^{I_0} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \omega_{I_0}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{I_0}$$

$$\begin{array}{ccc} \lambda(M) & \xleftarrow{\phi^*} & \lambda(N) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

146 **Lemma:**

ϕ^* ist ein Algebra-Homomorphismus und kommutiert mit d . Um $\phi^*\omega$ für $\omega \in \lambda^k(N)$ konkret zu schreiben, benutzen wir den Isomorphismus

$$\phi^*\omega(p)[X_1, \dots, X_k] = \omega(\phi(p))[d\phi(p)[X_1], \dots, d\phi(p)[X_k]]$$

$X_i \in T_p M$ und $d\phi(p)[X_i] \in T_{\phi(p)} N$.

147 **Lemma:**

Eine alternierende k -Form \tilde{a} auf $\tau^1(M)$ ist punktweise von einer Differentialform $\omega \in \lambda^k(M)$ abgeleitet, wenn

$$\tilde{\omega}[X_1, \dots, X_k] \in C^\infty(M)$$

$$\tilde{\omega}[fX_1, \dots, X_k] \in f\tilde{\omega}[X_1, \dots, X_k]$$

Auswertung mit

$$dx^I(p)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right] = \delta_J^I$$

4.3 Die Lie-Ableitung

Wir möchten ein Vektorfeld Y in der Richtung eines anderen Vektorfelds X Ableiten.

$$\mathcal{L}_X Y(p) = d\phi_{-t}^X(\phi_t^X(p))[Y]$$

148 **Definition: „Lie-Ableitung“**

Die Lie-Ableitung ist definiert als

$$\mathcal{L}_X f(p) := Xf(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \phi_t^X(p)$$

Beachte, dass $(t, p) \mapsto \phi_t^X(p)$ glatt in einer Umgebung $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times U_p$ ist.

149 **Definition: „Lie-Ableitung auf Differentialformen“**

Sei $\omega \in \lambda(M)$ und $X \in \tau^1(M)$, dann setzen wir

$$\mathcal{L}_X \omega(p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \omega$$

150 **Lemma: Eigenschaften der Lie-Ableitung**

Sei $X, Y \in \tau_1(M)$, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \lambda(M)$, $f, g \in \lambda^0(M)$, so gilt

1. \mathcal{L}_X ist eine Derivation auf $\lambda(M)$, das heißt

$$\mathcal{L}_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\mathcal{L}_X \omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (\mathcal{L}_X \omega_2)$$

2. $\mathcal{L}_X(fdg) = (Xf)dg + fd\mathcal{L}_Xg = (Xf)dg + fd(Xg)$
3. $\mathcal{L}_X(\omega[Y]) = \mathcal{L}_X\omega[Y] + \omega[\mathcal{L}_XY]$
4. $\mathcal{L}_XY = [X, Y]$
5. $[d, \mathcal{L}_X] = 0$

Beweis (150)

1.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t^*\omega_1 \wedge \phi_t^*\omega_2) \\ &= \mathcal{L}_X\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \mathcal{L}_X\omega_2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(f \wedge dg) &= \mathcal{L}_Xf \wedge dg + f \wedge \mathcal{L}_Xdg \\ &= (Xf)dg + f \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^*dg = (Xf)dg + fd(Xg)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\omega[Y])(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega[Y](\phi_t(p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega(\phi_t(p))[Y(\phi_t(p))] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega(\phi_t(p))[d\phi_t(p)[d\phi_{-t}(p)[Y(\phi_t(p))]]] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^*\omega(p)[d\phi_{-t}(\phi_t(p))[Y(\phi_t(p))]] \\ &= \mathcal{L}_X\omega(p)[Y] + \omega(p)[\mathcal{L}_XY]\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_XY)f(p) &= df(p)[\mathcal{L}_XY(p)] \stackrel{(3)}{=} \mathcal{L}_X(df(p)[Y]) - (\mathcal{L}_Xdf)[Y] \\ &= \mathcal{L}_X(Yf)(p) - d(Xf)[Y](p) = X(Yf)(p) - Y(Xf)(p)\end{aligned}$$

5. Benutze $d\omega = dg_0 \wedge \dots \wedge dg_k$ und Teil 1.**151 Satz: Cartans magische Formel**

$$\mathcal{L}_X = d \circ i(X) + i(X) \circ d =: \tilde{\mathcal{L}}_X$$

Beweis (151) Auf zerlegbaren Formen ist

$$i(X)\underbrace{(v^1 \wedge \dots \wedge v^k)}_{\omega} = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} v^j[X] v^1 \wedge \dots \wedge v^{j-1} \wedge v^{j+1} \wedge \dots \wedge v^k$$

oder alternativ, wenn man die Interpretation als alternierende k -Formen bevorzugt:

$$i(X)\omega[X_1, \dots, X_{k-1}] = \omega[X, X_1, \dots, X_{k-1}]$$

Damit sieht man, dass $i(X)$ eine Antiderivation auf $\lambda(M)$ vom Grad -1 ist. Außerdem ist d eine Antiderivation auf $\lambda(M)$ vom Grad 1 . Somit ist $\tilde{\mathcal{L}}_X(\lambda^k(M)) \subset \lambda^k(M)$, aber ist es eine Derivation?

Sei $\omega_i \in \lambda^i(M)$, $i = 1, 2$ und berechne

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_X(\omega_1 \wedge \omega_2) &= (d \circ i(X) + i(X) \circ d)\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= d(i(X)\omega_1 \wedge \omega_2 + \varepsilon_M \omega_1 \wedge i(X)\omega_2) + i(X)(d\omega_1 \wedge \omega_2 + \varepsilon_M \omega_1 \wedge d\omega_2) \\ &= (d \circ i(X))\omega_1 \wedge \omega_2 - i(X)\varepsilon_1 \omega_1 \wedge d\omega_2 + d\varepsilon_M \omega_1 \wedge i(X)\omega_2 + \omega_1 \wedge d \circ i(X)\omega_2 \\ &\quad + i(X)d\omega_1 \wedge \omega_2 - d\varepsilon_M \omega_1 \wedge i(X)\omega_2 + i(X)\varepsilon_M \omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_1 \wedge i(X) \circ d\omega_2 \\ &= \tilde{\mathcal{L}}_X \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \tilde{\mathcal{L}}_X \omega_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(fdg) &= Xfdg + fdXg = (Xf)dg + fd(Xg) \\ &= Xfdg + fd(i(X)dg) = (\tilde{\mathcal{L}}_X f)dg + f\tilde{\mathcal{L}}_X dg = \tilde{\mathcal{L}}_X fdg \end{aligned}$$

Da die beiden Derivationen hier übereinstimmen, sind sie gleich.

4.4 Integration

152 Definition: „Orientierbare Mannigfaltigkeit“

Eine Mannigfaltigkeit wird *orientierbar* genannt, wenn es einen Atlas \mathcal{A} von M gibt, sodass für $x, y \in \mathcal{A}$ gilt

$$\det d(x \circ y^{-1}) > 0$$

153 Lemma:

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. M^m ist orientierbar.
2. Es gibt ein $\omega \in \lambda^m(M)$ mit $\forall p \in M: \omega(p) \neq 0$. Wir bezeichnen ω auch mit vol_M .
3. $\Lambda^m T^*M \setminus \{0\}$ besteht aus zwei Komponenten.

Beweis (153) Wir nehmen an, dass M zusammenhängend ist, sonst muss die Betrachtung für jede Komponente einzeln durchgeführt werden.

(1) \Rightarrow (2) Sei \mathcal{A} ein Atlas wie er in der Definition vorausgesetzt wird und $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung der Eins, die der Überdeckung $(U_x)_{x \in \mathcal{A}}$ untergeordnet ist. Dann definieren wir

$$\text{vol}_x(p) := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m(p)$$

$$\omega := \sum_{j \in \mathbb{N}} \phi_j \text{vol}_{x_j} > 0$$

Bei $p \in \bigcap_{k=1}^L U_{x_{j_k}}$ haben wir

$$\omega(p) = \sum_{k=1}^L \phi_{j_k}(p) \text{vol}_{x_{j_k}}(p) = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^L \phi_{j_k}(p) \underbrace{\det d(x_{j_k} \circ x_{j_i}^{-1})(x_{j_i}(p))}_{>0} \right)}_{\geq \inf_k \det d(x_{j_k} \circ x_{j_i}^{-1})(p)} \text{vol}_{x_{j_i}}(p)$$

(2) \Rightarrow (3) Ist M nicht orientierbar, so gibt es einen stetigen Weg $\tilde{\omega}: [0, 1] \rightarrow \wedge^m M$ sodass $\tilde{\omega}(0) = \omega(p)$, $\tilde{\omega}(1) = -\omega(p)$ und $\tilde{\omega}(t) = \lambda(t)\omega(c(t)) \Rightarrow \lambda: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^*$

Schließlich müssen wir noch zeigen, dass $\wedge^m M$ höchstens 2 Komponenten haben kann. Sei $p_0 \in M$ fest gewählt und $p \in M$ beliebig, $\omega(p_0) \in \wedge_{p_0}^m M$ so gibt es einen stetigen Weg $\omega: [0, 1] \rightarrow \wedge^m M$ mit $\omega(0) = p_0$, $\pi_M \omega(1) = p$. Dies genügt um die Behauptung zu zeigen.

Beispiele

1. $(\mathbb{R}^m, \text{vol}_{st})$ ist orientierbar.
2. T^m ist orientierbar, denn S^1 ist orientierbar. Dies gilt wiederum denn

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \text{erbt} \quad d\theta \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \right] = 1$$

3. $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ist orientierbar mit

$$\text{vol}_{S^m}(x) = j^*(i(X) \text{vol}_{st}) \neq 0$$

4. Es gibt auch nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten: zum Beispiel das Möbiusband.

Im folgenden werden wir uns auf *orientierte Mannigfaltigkeiten* beschränken. Das heißt orientierbare Mannigfaltigkeiten mit einer gewählten Orientierung $\omega = \text{vol}_M$. x ist orientiert, wenn $\text{vol}_M \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right] > 0$.

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung besagt

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f(t) dt = f(b) - f(a)$$

Dieses wollen wir auf \mathbb{R}^m verallgemeinern.

Der Satz von Gauß Ist M ein wohlbegrenzter Bereich im \mathbb{R}^m und $X \in \tau_1(\mathbb{R}^m)$, so ist

$$\int_M \operatorname{div} X = \int_{\partial M} \langle X, n_G \rangle$$

Dabei ist $\operatorname{div} X(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial X^j}{\partial x^j}$ sehr speziell. Besser wäre ein Satz über eine „universelle Derivation“, zum Beispiel d . Dabei verallgemeinern wir $I = [0, 1]$ zu Δ^m , dem m -dimensionalen Simplex mit Rand $\partial\Delta^m$ und dann hätten wir gern

$$\int_{\Delta^m} d\omega = \int_{\partial\Delta^m} \omega$$

wobei diese Dinge jedoch erst exakt definiert werden müssen. Jedes $\omega \in \lambda_c^m(\mathbb{R}^m)$ kann als $\omega(x) = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m =: f(x) \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^m}$ dargestellt werden. Dann definieren wir:

154 **Definition: „Integration von Differentialformen“**

$$\int_{\mathbb{R}^m} \omega = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \omega\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right](x) dx$$

wobei letzteres das Integral bzgl. des Lebesgue-Maß' ist.

155 **Definition: „m-Simplex“**

Die Menge

$$\Delta^m := \left\{ (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x^i \leq 1 \wedge \forall i = 1, \dots, m: x^i \geq 0 \right\}$$

nennen wir m -Simplex. Dies ist gerade die konvexe Hülle von $\{0, e_1, \dots, e_m\}$.

156 **Definition: „Seiten“**

Die $m + 1$ Seiten von Δ^m sind kanonische Bilder von Δ^{m-1} und somit durch folgende Abbildungen gegeben:

$$f_i^{m-1}(x^1, \dots, x^{m-1}) = \begin{cases} i = 0: & (1 - \sum_{k=1}^{m-1} x^k, x^2, \dots, x^{m-1}) \\ 1 \leq i \leq m: & (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^{m-1}) \end{cases}$$

für $0 \leq i \leq m$.

Da $d\omega_j(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} dx^k$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \sum_{j=1}^m \omega_j(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^m, \omega_j \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \\ \Rightarrow d\omega(x) &= \sum_{j=1}^m d\omega_j(x) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j} \text{vol}_{\mathbb{R}^m}(x) \end{aligned}$$

Jetzt können wir integrieren:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^m} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j}(x) dx &= \int_{\sum_{l=1}^m x^l \leq 1} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j}(x) dx \\ &= \int_{\sum_{l \neq j} x^l \leq 1} \left(\int_0^{1-\sum_{l \neq j} x^l} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j}(\dots, x^j, \dots) dx^j \right) d(x^1, \dots, \cancel{x^j}, \dots, x^m) \\ &= \int_{\sum_{l \neq j} x^l \leq 1} \omega_j(x^1, \dots, x^{j-1}, 1 - \sum_{l \neq j} x^l, x^{j+1}, \dots, x^m) \\ &\quad - \omega_j(x^1, \dots, x^{j-1}, 0, x^{j+1}, \dots, x^m) d(x^1, \dots, \cancel{x^j}, \dots, x^m) \end{aligned}$$

Nun können wir $x^l \mapsto x^l, l \leq j-1$ und $x^l \mapsto x^{l-1}, l \geq j+1$ substituieren und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^m} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^j}(x) dx &= \int_{\Delta^{m-1}} \omega_j(x^1, \dots, x^{j-1}, 1 - \sum_{l=1}^{m-1} x^l, x^j, \dots, x^{m-1}) \\ &\quad - \omega_j(x^1, \dots, x^{j-1}, 0, x^j, \dots, x^{m-1}) dx \end{aligned}$$

Die vermutete Identität entsteht dann nur dadurch dass wir den Randoperator ∂ definieren und den analytischen Ausdruck geometrisch interpretieren.

157 **Definition: „glatter p-Simplex“**

Wir nennen δ , *glatter p-Simplex* in M (zum Beispiel $M = \mathbb{R}^m$), wenn es eine Abbildung $\delta^p: \Delta^p \rightarrow M$ und die Einschränkung einer Abbildung $\tilde{\delta} \in C^\infty(U, M)$ auf einer offenen Menge $U_\delta \supset \Delta^p$.

Dann definieren wir für $\omega \in \lambda^p(M)$:

$$\int_{\delta^p} \omega := \int_{\Delta^p} (\delta^p)^* \omega$$

Mit $C^p(M)$ bezeichnen wir den freien Vektorraum der von allen glatten p -Simplizes aufgespannt wird. Dann können wir den Randoperator $\partial: C^p(M) \rightarrow C^{p-1}(M)$, welcher linear fortgesetzt werden kann als:

$$\partial\delta := \sum_{i=1}^p (-1)^i \delta \circ f_i^{p-1}$$

158 **Lemma:**

$$\partial \circ \partial = 0$$

Beweis (158) Wir verwenden:

$$f_i^{p-1} \circ f_j^{p-1} = f_{j+1}^{p-1} \circ f_i^{p-2}$$

für $i \leq j$.

159 **Satz: Stokes**

Für jeden glatten m -Simplex δ in M und jedes $\omega \in \lambda^{m-1}(M)$ gilt

$$\int_{\delta^m} d\omega = \int_{\partial\delta^m} \omega$$

Beweis (159)

$$\begin{aligned} \int_{\delta} d\omega &= \int_{\Delta^m} \delta^*(d\omega) = \int_{\Delta^m} d(\delta^*\omega) \\ \int_{\partial\delta} \omega &= \sum_{i=1}^p (-1)^i \int_{\delta_i} \omega = \sum_{i=1}^p (-1)^i \int_{\Delta^{m-1}} (\delta \circ f_i^{m-1})^* \omega = \sum_{i=1}^p (-1)^i \int_{\Delta^{m-1}} (f_i^{m-1})^* (\delta^*\omega) \end{aligned}$$

Wie in vorheriger Betrachtung gilt mit $\eta := \delta^*\omega$ für $\eta = \sum_{j=1}^m \eta_j dx^1 \wedge \dots \wedge \cancel{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^m$:

$$\begin{aligned} d\eta &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \frac{\partial \eta_j}{\partial x^j} \text{vol}_{\mathbb{R}^m} \\ \int_{\Delta^m} d\eta &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \int_{\Delta^m} \frac{\partial \eta_j}{\partial x^j} dx \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \int_{\Delta^{m-1}} \eta_j(x^1, \dots, x^{j-1}, 1 - \sum_{l=1}^{m-1} x^l, x^j, \dots, x^{m-1})(x) \\ &\quad - \eta_j(x^1, \dots, x^{j-1}, 0, x^j, \dots, x^{m-1})(x) dx \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\delta} \omega &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \int_{\Delta^{m-1}} (f_i^{m-1})^* \eta \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} (-1)^i \int_{\Delta^{m-1}} \eta_j(f_i^{m-1}(x)) d(x^1 \circ f_i^{m-1}) \wedge \dots \wedge \cancel{d(x^j \circ f_i^{m-1})} \wedge \dots \wedge d(x^m \circ f_i^{m-1}) \end{aligned}$$

Was ist mit Integralen von $\omega \in \lambda_c^m(M)$ über M ? Dazu brauchen wir Orientierung!

Integration auf orientierbaren Mannigfaltigkeiten

M ist orientierbar gdw. $\Lambda^m M$ zwei Komponenten $\Lambda^m M_{\pm}$ hat. Eine *Orientierung* ist eine Wahl aus diesen Komponenten, zum Beispiel $\Lambda^m M_+$. Dann wird $\Lambda^m M_-$ die entgegengesetzte Orientierung genannt. Ist $(X_i)_{i=1}^m$ eine Basis von $T_p M$ so wird sie *orientiert* genannt, wenn $X_1^* \wedge \dots \wedge X_m^* \in \Lambda^m M_+$.

160 Definition: „Integral auf Mannigfaltigkeiten“

Sei $\omega \in \lambda_c^m(M)$ und wähle eine Zerlegung der Eins $(x_j, \phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ wie bevor, sodass $\text{vol}_{x_j} \in \Lambda^m M_+$ und $\det d(x_j \circ x_{j'})^{-1} > 0$. So definieren wir

$$\int_M \omega := \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_M \phi_j \omega = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} (x_j^{-1})^* (\phi_j \omega)$$

161 Satz:

Sei M orientiert durch $\Lambda^m M_+$, dann ist **Definition 160 (Integral auf Mannigfaltigkeiten)** unabhängig von den Auswahlen.

Beweis (161) Sei $(x_j, \phi_j), (y_k, \psi_k)$ zwei solche Auswahlen. Dann können wir für $\omega \in \lambda_c^m(M)$ schreiben:

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \sum_{j \geq 1} \int_M \phi_j \omega = \sum_{j,k \geq 1} \int_M \phi_j \psi_k \omega \\ &= \sum_{j,k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^m} (x_j^{-1})^* (\phi_j \psi_k \omega) = \sum_{j,k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^m} (y_k^{-1})^* (y_k \circ x_j^{-1})^* (\phi_j \psi_k \omega) \\ &= \sum_{j,k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^m} (y_k^{-1})^* (\phi_j \psi_k \omega) = \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^m} (y_k^{-1})^* (\psi_k \omega), \end{aligned}$$

da die Transformationsregel gerade der Pullback ist. Somit ist das Integral wohldefiniert.

Im folgenden sei $G \subset M$ ein Gebiet mit kompaktem Abschluss. Sei $X = \tilde{X}(p) \in \tau_1(M), p \in \partial M$. X wird *äußerer Vektor* von G genannt, wenn $\phi_t^{\tilde{X}} \in M \setminus \bar{G}$ für $t \in (0, \varepsilon(X, p)), \varepsilon > 0$.

162 **Definition: „Randorientierung“**

Die Hyperfläche $N = \partial G$ besitzt die *Randorientierung* induziert von M und G bedeutet, eine Basis $\{Y_1, \dots, Y_{m-1}\} \subset T_p N$ ist genau dann orientiert, wenn $\{-X, Y_1, \dots, Y_{m-1}\}$ orientiert ist.

Nun konstruieren wir eine Überdeckung von \bar{G} des folgenden Typs. Für jeden Punkt $p \in \bar{G}$ konstruieren wir eine Umgebung U_p mit

1. Ist $p \in G$ so wähle eine Koordinatenumgebung mit $U_p \subset \text{Int } \delta^m$.
2. Ist $p \in \partial G = N$ so wähle ein U_p in M sodass $U_p \cap G \subset \delta$ mit $\delta, \partial G \subset \delta^m$.

163 **Satz:**

Sei $G \subset M$ offen, relativ kompakt und zusammenhängend sowie $\partial G = N$ eine glatte Hyperebene. Ist M orientiert, so sei ∂G mit der Randorientierung besetzt. Schließlich wähle eine angepasste Koordinatenüberdeckung wie oben. Dann gilt für $\omega \in \lambda^{m+1}(M)$:

$$\int_G d\omega = \int_N \omega$$

Beweis (163)

$$\begin{aligned} \int_G d\omega &= \sum_{k \geq 1} \int_G \phi_k d\omega = \sum_{k \geq 1} \int_G (d(\phi_k \omega) - d\phi_k \wedge \omega) = \sum_{k \geq 1} \int_G d(\phi_k \omega) \\ &= \sum_{k \geq 1} \int_{\delta_k} d(\phi_k \omega) = \sum_{k \geq 1} \int_{\partial \delta_k} \phi_k \omega = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ \text{supp } \phi_k \cap \partial G \neq \emptyset}} \int_{\delta_k} \phi_k \omega \\ &=: \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 0 \leq i \leq m}} (-1)^i \int_{\delta_{k,i}} \tilde{\phi}_k \omega = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 0 \leq i \leq m}} (-1)^i \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \delta_{k,i}^* (\tilde{\phi}_k \omega) \\ &= \sum_{k \geq 1} (-1)^m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \delta_{k,m} \tilde{\phi}_k \omega \stackrel{?}{=} \sum_{k \geq 1} \int_{\partial G} \tilde{\phi}_k \omega = \int_{\partial G} \omega \end{aligned}$$

Ist g eine Riemannsche Metrik so verwenden wir im folgenden die Schreibweise

$$g^{TM}[X, Y](p) =: \langle X, Y \rangle_{TM}(p).$$

Historische Bemerkung Auf dem \mathbb{R}^m haben wir die Standardkoordinaten $g_{st}[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = \delta_{ij}$. Das heißt $(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p)_{i=1}^m$ ist eine Orthonormalbasis für jedes $p \in \mathbb{R}^m$ — die *Euklidische Metrik* ($\tau\alpha\sigma\tau\iota\chi\epsilon\iota\alpha$ — Die Elemente der Geometrie).

Die induzierte Metrik auf einer Untermannigfaltigkeit $F^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist $g^{TF}(p) = g^{T\mathbb{R}^3}(p) \Big|_{T_p F}$. Gauß vermaß das Königreich Hannover. Dies führte zum Theorema egregium: Die induzierte Metrik ist in der Fläche selbst bestimmbar. Riemann erkannte: eine Mannigfaltigkeit besteht auch

ohne Metrik. Außerdem definierte er einen Krümmungstensor, welcher die Geometrie der Riemannschen Mannigfaltigkeit charakterisiert. Insbesondere ist eine Mannigfaltigkeit genau dann lokal isometrisch zum euklidischen Raum, wenn der Riemannsche Krümmungstensor identisch verschwindet.

Diskussion Lokal gibt es orthonormale *Schnittbasen* (orthonormal Frames) $on f$. Mit einer Orientierung ergibt sich dann orientierte, orthonormale Schnittbasen. Dadurch entsteht ein Spannungsverhältnis zwischen den loanf $(e_i)_{i=1}^n$ und den lokalen Rahmen $(\frac{\partial}{\partial x^j})$.

Definieren wir $Y^b[X] := \langle X, Y \rangle$ und $b^{-1} = \sharp$, dann ist $Y \mapsto Y^b$ ein Isomorphismus zwischen $T_p M$ und $T_p^* M$. Beachte, dass $e^i[e_j] = e_i^\sharp[e_j] = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, der Isomorphismus also orthonormale Basen auf orthonormale Basen abbildet.

Beispiel

$$\begin{aligned} \text{grad } f &:= (df)^\sharp \\ g_{ij}(p) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle(p) \\ (g^{ij}) &= (g_{ij})^{-1} \\ \text{grad } f &= \sum_{j=1}^m a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\ \left\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle &= \sum_{j=1}^m a^j g_{jk} \\ &= \left\langle (df)^\sharp, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = df \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \right] = \frac{\partial f}{\partial x^k} \\ \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^k} g^{kl} &= \sum_{k,j=1}^m a^j g_{jk} g^{kl} = \sum_j a^j \delta_{jl} = a^l \end{aligned}$$

164 Definition: „lokale Volumenform“

Ist (e_i) ein loanf für TU_x , dann setze

$$\text{vol}_{U_x} := e^1 \wedge \dots \wedge e^m$$

und vol_M ist global eindeutig bestimmt.

165 Definition: „Riemannsches Maß“

Für $f \in C_c(M)$ setzen wir

$$\int_M f := \int_M f \text{vol}_M$$

Erinnerung Sei $G \subset M$ ein relativ kompaktes Gebiet und ∂G eine orientierbare Hyperfläche, so ist in $p \in \partial G$ der Normalenvektor $n_a := X \in T_p M, |X| = 1, X \perp T_p \partial G$ (X äußerer Vektor). Dann ist $(e_i)_{i=1}^{m-1}$ onf für $T\partial G$ orientiert in ∂G (relativ zu G), wenn $\{n_a, e_1, \dots, e_{m-1}\}$ in TM orientiert ist und $\text{vol}_{\partial G} = e^1 \wedge \dots \wedge e^{m-1}$.

Sei $j: \partial G \rightarrow M$ die natürliche Einbettung. Dann gilt für $\omega \in \lambda^{m-1}(M)$

$$\int_G d\omega = \int_{\partial G} j^* \omega$$

Der *-Operator (von Hodge)

Wir haben auf allen Tensorbündeln lonf , zum Beispiel für einen lonf (e_i) mit dualem Frame (e^j) ist

$$(e^I := e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})_{\substack{I \subset \mathbb{N}_k, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m \\ k=0, \dots, m}}$$

ein lonf von $\Lambda^k T^* M$.

$$\Lambda M := \Lambda T^* M = \bigoplus_{k=0}^m \Lambda^k T^* M$$

Sei $\alpha \in \Lambda^j M, \beta \in \Lambda^{m-j} M$, so ist

$$\alpha \wedge \beta = \Phi(\alpha, \beta) \text{vol}_M = \langle \alpha, \Phi(\beta) \rangle_{\Lambda^j} \text{vol}_M$$

mit Φ bijektiv, nach Riesz. Für $\Phi(\beta) = \gamma$ ist dann

$$\Leftrightarrow \langle \alpha, \gamma \rangle_{\Lambda^j} \text{vol}_M = \alpha \wedge \Phi^{-1}(\gamma) \text{vol}_M$$

$$\Phi^{-1}: = *_M \in \mathcal{L}(\Lambda^{m-j} M, \Lambda^j M)$$

Wir berechnen $\Phi^{-1}(e^I)$ mit $|I| = m - i$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, e^I \rangle e^1 \wedge \dots \wedge e^m &= \alpha \wedge \Phi^{-1}(e^I) = \alpha_I \text{vol}_M = \alpha \wedge \Phi^{-1}(e^I) = \alpha_I e^I \wedge e^{iI} \text{sgn}(I, iI) \\ &= \alpha \wedge c e^{iI} = \alpha_I e^I \wedge e^{iI} c \Rightarrow c = \text{sgn}(I, iI) \\ &\Rightarrow \Phi^{-1}(e^I) = \text{sgn}(I, iI) e^{iI} = *_M e^I \end{aligned}$$

166 **Lemma: Eigenschaften von ***

1. $** = \varepsilon_M^{m+1}$ mit $\varepsilon_M|_{\Lambda^j M} = (-1)^j \text{id}_{\Lambda^j}$.
2. $*$ ist eine Isometrie

Wir definieren

$$\lambda_{(2)}(M) := \overline{\lambda_c(M)}^{\|\cdot\|_{(2)}}$$

mit der Norm

$$\|\omega\|_{(2)}^2 := \int_M |\omega|_{\Lambda M}^2 \text{vol}_M = \int_M \omega \wedge *\omega$$

167 **Definition: „Divergenz eines Vektorfeldes“**

Sei $X \in \tau_1(M)$, dann

$$\operatorname{div} X \operatorname{vol}_M := d(*X^\flat)$$

168 **Satz: Satz von Gauß**

Für $X \in \tau_1(M)$ und der äußeren Normalen n_a gilt

$$\int_G \operatorname{div} X = \int_{\partial G} \langle X, n_a \rangle$$

Beweis (168) Nach Stokes ist

$$\int_G \operatorname{div} X = \int_{\partial G} *_M X^\flat$$

O.B.d.A. sei $\operatorname{supp} X \subset U_x$ und $(e_i)_{i=1}^m$ loonf in U_x , also $\operatorname{vol}_M = e^1 \wedge \dots \wedge e^m$. Dann ist

$$\begin{aligned} X &= \sum_i X^i e_i, & X^i &= \langle X, e_i \rangle = \langle X^\flat, e^i \rangle \\ X^\flat &= \sum_i X^i e^i \\ *_M X^\flat &= \sum_i X^i \operatorname{sgn}(i, \{1, \dots, \hat{i}, \dots, m\}) \cdot e^1 \wedge \dots \wedge e^{\hat{i}} \wedge \dots \wedge e^m \\ &= \sum_i X^i (-1)^{i-1} e^1 \wedge \dots \wedge e^{\hat{i}} \wedge \dots \wedge e^m \end{aligned}$$

Randorientierung:

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^m = (-1)^{m-1} e^m \wedge e^1 \wedge \dots \wedge e^{m-1} =: n_a \wedge \operatorname{vol}_{\partial G} \iff n_a = (-1)^{m-1} e^m$$

Also ist

$$\begin{aligned} j^* e^i &= e^i, \quad 1 \leq i \leq m-1 \\ j^* e^m(p)[e_i] &= e^m(p)[j_* e_i] = e^m(p)[e_i] = \langle e_m, e_i \rangle(p) = 0, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ j^* *_M X^\flat &= X^m (-1)^{m-1} \operatorname{vol}_{\partial G} = \langle X, e_m \rangle (-1)^{m-1} \operatorname{vol}_{\partial G} \\ &= \langle X, (-1)^{m-1} e_m \rangle \operatorname{vol}_{\partial G} = \langle X, n_a \rangle \operatorname{vol}_{\partial G} \end{aligned}$$

Etwas mehr Geometrie169 **Definition: „Kovariante Ableitung“**

Zu $X, Y \in \tau_1(M)$ sei $\nabla: Y \mapsto \nabla_X Y \in \tau_1(M)$ eine Abbildung so, dass

1. $X \mapsto \nabla_X Y$ ist $C^\infty(M)$ -linear

$$2. \nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

Dann heißt ∇ *kovariante Ableitung* und *affine Zusammenhang*. Eine *Levi-Civita-Ableitung* erfüllt zusätzlich zwei metrische Eigenschaften:

$$3. X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \text{ (metrisch bzw. orthogonal)}$$

$$4. \text{ Die Torsion } T^\nabla[X, Y] := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \text{ (torsionsfrei)}$$

170 Satz: Hauptsatz der Riemannschen Geometrie

Eine Levi-Civita-Ableitung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist durch ∇_X eindeutig bestimmt.

Beweis (170) Seien $X, Y, Z \in \tau_1(M)$. Dann gilt

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (4-1)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \quad (4-2)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \quad (4-3)$$

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle \nabla_Y X, Z \rangle \quad (4-4)$$

$$\langle [Y, Z], X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle - \langle \nabla_Z Y, X \rangle \quad (4-5)$$

$$\langle [Z, X], Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle \nabla_X Z, Y \rangle \quad (4-6)$$

Dann können wir (4-1) + (4-2) - (4-3) + (4-4) - (4-5) + (4-6) rechnen und erhalten die *Formel von Koszul*:

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ - (\langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle)$$

Problem der Geodätischen Zu $p, q \in M$ wird ein kürzester Weg $c_{p,q}: [0, d_M(p, q)] \rightarrow M$ gesucht, das heißt

$$c_{p,q}(0) = p, \quad c_{p,q}(d_M(p, q)) = q, \quad |c'_{p,q}(t)| = 1 \\ L(c_{p,q}) = d_M(p, q)$$

171 Lemma:

Sei $x: U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ zentriert bei p . Dann existiert ein Ionf (e_i) für $TM|_{U_x}$ derart, dass die Frameableitungen bei p verschwinden: $\forall i, j: (\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$. Ist (f_j) ein beliebiger If, dann heißen die Größen $(\langle \nabla_{f_i} f_j, f_k \rangle)_{i,j,k=1}^n$ die *Christoffel-Symbole* von (f_j) .

5 de Rham und Hodge Theorie

Bisher haben wir Objekte in Bezug auf lokale Koordinaten betrachtet und die Unabhängigkeit von der Wahl der Koordinaten gezeigt. Allerdings gibt es auch nicht-lokale Eigenschaften, wie zum Beispiel Orientierung. Diese werden mit der Topologie im Zusammenhang stehen.

de Rham Kohomologie Wir betrachten $(\lambda(M), d)$, $d^j: \lambda^j(M) \rightarrow \lambda^{j+1}(M)$ und $\varepsilon: \Lambda M \rightarrow \Lambda M$. Diese genügen der Gleichung $d\varepsilon + \varepsilon d = 0$. Der Raum ΛM wird durch ε in gerade und ungerade Formen zerlegt $\Lambda M = \Lambda^{ev} M \oplus \Lambda^{odd} M$ und d ist ungerade.

Wichtig: $d^2 = 0$ und somit ist $\text{Im } d \subset \text{Ker } d$. Dann definieren wir

$$H_{dR}(M) := \text{Ker } d / \text{Im } d = \bigoplus_{j=1}^m H_{dR}^j(M) = H_{dR}^{ev}(M) \oplus H_{dR}^{odd}(M)$$

Funktorielle Eigenschaften Sei $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ so erfüllt $f^*: \lambda(M_2) \rightarrow \lambda(M_1)$ die Eigenschaft $d_{M_1} f^* = f^* d_{M_2}$ und dann induziert f^* einen Homomorphismus $H_{dR}(f): H_{dR}(M_2) \rightarrow H_{dR}(M_1)$.

Nun stellt sich die Frage, ob dies auch für eine allgemeine Abbildung $A: \lambda(M) \rightarrow \lambda(M)$ funktioniert. Wir brauchen dazu die Eigenschaft: $Ad = \pm dA$.

172 Lemma: Homotopie Operator

Betrachte $K: \lambda(M) \rightarrow \lambda(M)$ vom Grad -1 . Dann induziert $A := \pm(Kd \pm dK)$ induziert einen Endomorphismus von $H_{dR}(M)$ vom Grad 0.

Ein solches K wird *Homotopie Operator* genannt.

Beweis (172)

$$Ad = \pm(\pm dKd) = \pm(\pm dKd) = dA$$

Wir berechnen nun $H_{dR}(\mathbb{R}^m)$ induktiv. Dazu wählen wir die Abbildungen $\pi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\pi(x, t) := x$ und $s: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $s(x) := (x, 0)$. Dann wollen wir zeigen, dass

$$\pi^* s^* - \text{id}_{\lambda(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})} = -\varepsilon(Kd - dK)$$

für ein passendes K gilt. Dazu untersuchen wir die Struktur der Formen auf $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$:

$$\omega(x, t) = \sum_{I, J \subset \mathbb{N}_m} (f_0(x, t) dx_I + f_1(x, t) dx_J \wedge dt) = \sum_{I, J} \left(\underbrace{f_0(x, t) \pi^* dx_I}_{\text{Typ A}} + \underbrace{f_1(x, t) \pi^* dx_J \wedge dt}_{\text{Typ B}} \right)$$

Dann können wir die Formen mit $\eta \in \lambda(\mathbb{R}^m)$ auch schreiben als

Typ A $\omega = f(x, t)\pi^*\eta$

Typ B $\omega = f(x, t)\pi^*\eta \wedge dt$

Dann definieren wir für $\eta \in \lambda^j(\mathbb{R}^m)$:

$$K\omega := \begin{cases} 0 & \omega \in \lambda^{j-1}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}) \\ \int_0^t f(x, u)du \pi^*\eta & \omega \in \lambda^j(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}) \end{cases}$$

Dann ist der Grad von K gerade -1 .

Beachte zuerst, dass $\pi \circ s = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$ und somit $s^*\pi^* = \text{id}_{H_{dR}(\mathbb{R}^m)}$.

Dann gilt für Typ A:

$$\begin{aligned} \omega &= f(x, t)\pi^*\eta, \eta \in \lambda^j(\mathbb{R}^m) \\ (\pi^*s^* - \text{id})\omega &= \pi^*(f(x, 0)s^*\pi^*\eta) - f(x, t)\pi^*\eta = f(x, 0)\pi^*\eta - f(x, t)\pi^*\eta \\ (Kd - dK)\omega &= K \left((\partial_x f(x, t)dx + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dt) \wedge \pi^*\eta + f(x, t)\pi^*d\eta \right) \\ &= 0 + (-1)^j \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)du \pi^*d\eta = (-1)^j (f(x, t) - f(x, 0))\pi^*\eta \\ &= (-1)^{j+1}(\pi^*s^* - \text{id})\omega \\ (-1)^j(dK - Kd)\omega &= (\pi^*s^* - \text{id})\omega = \varepsilon(dK - Kd)\omega \end{aligned}$$

und für Typ B:

$$\begin{aligned} \omega &= f(x, t)\pi^*\eta \wedge dt, \eta \in \lambda^j(\mathbb{R}^m) \\ (\pi^*s^* - \text{id})\omega &= \pi^*(f(x, 0)\eta \wedge s^*dt) - f(x, t)\pi^*\eta \wedge dt = -\omega \\ (dK - Kd)f(x, t)\pi^*\eta \wedge dt &= d \left(\int_0^t f(x, u)du \pi^*\eta \right) - K(\partial_x f(x, t)dx \wedge \pi^*\eta \wedge dt) \\ &= \int_0^t \partial_x f(x, u)du dx \wedge \pi^*\eta + f(x, t)dt \wedge \pi^*\eta + \int_0^t f(x, u)du \pi^*d\eta \\ &\quad - \int_0^t \partial_x f(x, u)du dx \wedge \pi^*\eta - \int_0^t f(x, u)du \pi^*d\eta \\ &= (-1)^j f(x, t)\pi^*\eta \wedge dt = (-1)^{j+1}(\pi^*s^* - \text{id})\omega \end{aligned}$$

173 **Satz:**

$$H_{dR}^j(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R}, & j = 0 \\ 0, & j > 0 \end{cases}$$

Beweis (173) Es reicht $m = 1$ zu betrachten. Dort gilt für $j = 0$:

$$\text{Ker } d = \{ f \equiv c \mid c \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{Im } d^{-1} = 0 \Rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

und für $j = 1$ ist

$$\text{Ker } d^1 = \lambda^1(\mathbb{R}) = \{ f(t)dt \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}) \} = \text{Im } d^0 = \{ g'(t)dt \mid g \in C^\infty(\mathbb{R}) \}$$

174 Satz: Poincaré Lemma

Ist $U \subset M$ diffeomorph zu \mathbb{R}^m so gilt

$$H_{dR}^j(U) = 0, \quad j > 0$$

175 Korollar:

Seien $f, g \in C^\infty(M_1, M_2)$ glatt homotop, dann induzieren f^* und g^* den gleichen Homomorphismus von $H_{dR}(M_2)$ nach $H_{dR}(M_1)$.

Beweis (175) Nach der Voraussetzung gib es ein $F \in C^\infty(M_1 \times I, M_2)$ sodass, $f = F \circ s_1, g = F \circ s_0$ wobei $s_j: p \mapsto (p, j), j = 0, 1$ und somit ist $f^* = s_1^* F^*, g^* = s_0^* F^*$ aber auf H_{dR} ist $g^* = (\pi^*)^{-1} = f^*$ nach Fortsetzung $(M_1 \times \mathbb{R} \xrightarrow{s_j, \pi} M_1)$.

Hodge Theorie Wir betrachten eine abgeschlossene, orientierte und zusammenhängende Mannigfaltigkeit M und dann den Abschluss von $(\lambda(M), d)$ unter der 2-Norm $\overline{\lambda(M)}^{(2)} =: \lambda_{(2)}(M) =: E$ mit der Riemannschen Metrik g^{TM} und

$$\|\omega\|_{(2)}^2 = \int_M \omega \wedge *_g \omega$$

Wir erweitern $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ über \mathbb{C} indem wir $E_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E$ setzen.

$$\mathcal{L}(E) = \{ A: E \rightarrow E \text{ linear und stetig} \Leftrightarrow \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\langle Ax, x \rangle_E| =: \|A\|_E < \infty \}$$

Allerdings hat d nicht diese Eigenschaft und ist nicht einmal für alle Elemente definiert. Glücklicherweise liegt der Definitionsbereich dicht in E .

Nach dem Satz über den abgeschlossenen Graph ist eine lineare Abbildung zwischen Banachräumen (also insbesondere Hilberträumen) genau dann stetig, wenn ihr Graph abgeschlossen ist.

176 Definition: „Abgeschlossene Operatoren“

Ein linearer Operator $D: U \subset E \rightarrow E$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Graph abgeschlossen in $E \times E$ ist. Wir nennen D *abschließbar*, wenn es einen Operator \bar{D} gibt, sodass

$$\overline{gr D} = gr \bar{D}$$

d ist kein abgeschlossener Operator.

177 **Lemma: Abschließbarkeitsbedingung**

Sei D ein linearer Operator in E , dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. D ist abschließbar.
2. Konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in \text{dom } D$ gegen 0 in E und $y_n = Dx_n$ konvergiert gegen y in E , so ist $y = 0$.

Seien $\alpha \in \lambda^{j-1}(M)$, $\beta \in \lambda^j(M)$ und berechne

$$\begin{aligned}
 \langle d\alpha, \beta \rangle &= \int_M d\alpha \wedge * \beta \\
 &= \underbrace{\left(\int_M d(\alpha \wedge * \beta) - (-1)^j \alpha \wedge d * \beta \right)}_{=0 \text{ Stokes}} \\
 &= (-1)^{j+1} \int_M \alpha \wedge * *^{-1} d * \beta \\
 &= \langle -\varepsilon \alpha, \varepsilon^{m+1} * d * \beta \rangle \\
 &= \langle \alpha, (-\varepsilon^m * d *) \beta \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *^2|_{\lambda^j M} &= (-1)^{j(m-j)} \text{id}_{\lambda^j M} \\
 &= (-1)^{jm-j^2} = (-1)^{j(m+1)} = \varepsilon^{m+1} \\
 \Rightarrow *^{-1} &= \varepsilon^{m+1} *
 \end{aligned}$$

because ε^{m+1} and $*$ commute

Damit erhalten wir also das folgende Lemma:

178 **Lemma: Laplace-Beltrami-Operator**

Für $\alpha \in \lambda^{j-1}(M)$, $\beta \in \lambda^j(M)$ gilt

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^\dagger \beta \rangle$$

wobei

$$d^\dagger = -\varepsilon^m * d *: \lambda^j(M) \rightarrow \lambda^{j-1}(M)$$

und wir können auch den Differentialoperator zweiter Ordnung definieren:

$$\Delta^j := (dd^\dagger + d^\dagger d)|_{\lambda^j(M)}$$

Alle diese Operatoren sind abgeschlossen da

$$\langle \Delta^j \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta^j \beta \rangle$$

symmetrisch auf dem Bereich $\text{dom } \Delta^j$. Δ^j wird der *Laplace-Beltrami-Operator* auf $\lambda^j(M)$ genannt.

Jetzt müssen wir den adjungierten Operator einführen. Ist $A \in \mathcal{L}(E)$ so ist $E \ni x \mapsto \langle Ax, y \rangle \in \mathbb{C}$ ein beschränktes lineares Funktional und dann gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein $A^* \in \mathcal{L}(E)$ sodass $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$.

179 **Definition: „Der Adjungierte Operator“**

Sei D ein linearer Operator in E . Dann definieren wir den *adjungierten Operator* wie folgt:

$$\text{dom } D^* = \{ y \in E \mid \forall x \in \text{dom } D: |\langle Dx, y \rangle| \leq C_y \|x\| \}$$

Dann lässt sich $\text{dom } D \ni x \mapsto \langle Dx, y \rangle$ wegen Stetigkeit fortsetzen zu einem beschränkten linearen Funktional auf E und nach Riesz ist dann $\langle Dx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle =: \langle x, D^* y \rangle$.

180 **Lemma: Eigenschaften der Adjungierten**

Sei D ein linearer Operator, sodass D^* existiert (aber womöglich kein linearer Operator ist), so gilt:

1. D ist abschließbar genau dann, wenn D^* dicht definiert ist. In diesem Fall gilt

$$D^{**} = \bar{D}$$

2. $(\lambda D)^* = \bar{\lambda} D^*$

3. Falls $D_1 D_2$ ein linearer Operator mit Bereich $\{ x \in \text{dom } D_2 \mid D_2 x \in \text{dom } D_1 \}$ ist, so ist

$$D_2^* D_1^* = (D_1 D_2)^*$$

181 **Definition: „Hodge-Operator“**

Jetzt definieren wir auf $\text{dom } \bar{d} \cap \text{dom } \bar{d}^\dagger$

$$D = D_{M,g^{TM}} = \bar{d} + d^{*,g^{TM}} = \bar{d} + \bar{d}^\dagger$$

als den *Hodge-Operator*.

Etwas abstrakter Betrachte einen Hilbertraum E , eine Involution $\alpha = \alpha^E = \varepsilon_M$ und einen abgeschlossenen Operator $d = \bar{d}$ so, dass

$$d\alpha + \alpha d = 0, \quad \alpha(\text{dom } d) = \text{dom } d$$

Wir nehmen an, dass $\text{Im } d \subset \text{Ker } d \Rightarrow d^2 = 0$. Dann können wir die Kohomologie definieren:

$$H(E, d) = H_d(E) := \text{Ker } d / \text{Im } d$$

Angenommen $H_d(E)$ ist endlich-dimensional

Korollar Dann ist $\text{Im } d$ abgeschlossen.

182 **Satz: Kodaira**

Es gibt eine orthogonale Zerlegung

$$E = \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^* \oplus \overline{\text{Im } d} \oplus \overline{\text{Im } d^*} =: E_h \oplus E_{cl} \oplus E_{ccl}$$

und wir bezeichnen die orthogonalen Projektionen mit P_h, P_{cl}, P_{ccl} .

183 **Satz: Hodge für Δ**

Der Operator $D = d + d^*$ mit $\text{dom } D = \text{dom } d \cap \text{dom } d^*$ ist selbstadjungiert, das heißt $D = D^*$. Weiterhin ist

$$\text{Ker } D = E_h = \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^*$$

und D ist ein Fredholm-Operator, das heißt $\dim \text{Ker } D + \dim \text{Ker } D^* < \infty$, $\text{Im } D = \overline{\text{Im } D}$ und der Index von D ist definiert als

$$\text{ind } D := \dim \text{Ker } D - \dim \text{Ker } D^* = 0$$

Betrachte eine geschlossene Form $\omega \in \text{Ker } d$. Beachte, dass $\text{Im } d \subset \text{Ker } d$ und $(\text{Ker } d)^\perp = \overline{\text{Im } d^*}$ da $\langle dx, y \rangle = \langle x, d^*y \rangle$. Dann ist

$$\begin{aligned} E &= \text{Ker } d \oplus \overline{\text{Im } d^*} = \overline{\text{Im } d} \oplus (\text{Im } d)^\perp \cap \text{Ker } d \oplus \overline{\text{Im } d^*} = \overline{\text{Im } d} \oplus \text{Ker } d^* \cap \text{Ker } d \oplus \overline{\text{Im } d^*} \\ &\Rightarrow \text{Ker } d = \text{Ker } D \oplus \overline{\text{Im } d} = \text{Ker } D \oplus \text{Im } d \\ &\Rightarrow \omega = P_h \omega + P_{cl} \omega = \omega_0 + d\omega_1 \end{aligned}$$

184 **Korollar:**

Jede de Rham Kohomologiekategorie besitzt eine eindeutig bestimmte harmonische Repräsentation.

Beachte, dass

$$D^2 = (d + d^*)^2 = dd^* + d^*d = \Delta \text{ auf } \lambda(M)$$

Dies setzt sich fort auf entsprechende selbstadjungierten Operatoren und

$$\text{Ker } D = \text{Ker } D^2 = \text{Ker } \Delta$$

denn $x \in \text{Ker } D^2 \Rightarrow 0 = \langle D^2 x, x \rangle = \|Dx\|^2$.

185 **Definition: „harmonische Formen“**

Die Elemente von $\text{Ker } D = \text{Ker } \Delta$ werden *harmonische Formen* genannt.

Wir können D zerlegen mittels $\text{dom } D = (\text{dom } D)^+ \oplus \underbrace{(\text{dom } D)^-}_{\subset E^-}$ sodass

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}$$

und dann ist $D^+ = \frac{1}{2}(\alpha + I)D$ sodass

$$\text{ind } D^+ = \dim H_d^+(E) - \dim H_d^-(E)$$

Für $M, g^{TM}, \varepsilon, d$ und $D = \bar{d} + \bar{d}^\dagger$ erhalten wir $\text{ind } D^+ = \chi(M)$, die *Euler-Charakteristik*.

Literatur

- [BT82] BOTT, Raoul ; TU, Loring W.:
Differential forms in algebraic topology.
Springer Verlag, 1982
- [Lan96] LANG, Serge:
Differential and Riemannian Manifolds.
Springer Verlag, 1996
- [Lan01] LANG, Serge:
Fundamentals of Differential Geometry.
Springer Verlag, 2001
- [War83] WARNER, Frank W.:
Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups.
Springer Verlag, 1983
- [Yos96] YOSIDA, Kosaku:
Functional Analysis.
Springer Verlag, 1996

Index

- k -linear, 15
- 1. Baire-Kategorie, 7
- 2. Baire-Kategorie, 7

- abelschen Lie-Algebren, 42
- abgeschlossen, 5, 6, 71
- abschließbar, 71
- Abschluss, 7
- adjungierten Operator, 72
- affine Zusammenhang, 67
- alternierend, 16
- Annihilator, 14
- antisymmetrisch, 16
- Atlas, 19, 28
- Automorphismus, 12
- azyklisch, 13

- Basis, 6, 12
- bijektiv, 3
- Bild, 13

- Cartan Differential, 55
- Christoffel-Symbole, 68

- de Rham Komplex, 55
- Deckbewegungen, 9
- Derivation, 30
- dicht, 7
- Diffeomorphismus, 21
- Differential, 32
- Differentialformen, 55
- Differentialkomplex, 13
- differenzierbar, 15
- Dimension, 12
- dualen Vektorraum, 14
- dynamisches System, 44

- Einbettung, 37
- eindimensionale Mannigfaltigkeit, 18
- einfach zusammenhängend, 8
- eingebettete Untermannigfaltigkeit, 38, 50
- Endomorphismus, 12

- Erzeugendensystem, 12
- Euklidische Metrik, 64
- Euler-Charakteristik, 74
- exakt, 13

- Faser, 3
- feineren, 5
- fett, 7
- Fluss, 44
- Formel von Koszul, 67
- frame, 34
- frei, 5
- fundamentaler Isomorphismus, 13
- Fundamentalgruppe, 8

- G -äquivariant, 4
- glatte Mannigfaltigkeiten, 28
- glatter p -Simplex, 61
- glattes Vektorfeld, 34
- Graph, 3
- grundlegenden Faserung, 5
- Gruppen, 11
- gröberen, 5

- halbeinfach, 48
- Halbordnung, 3
- harmonische Formen, 73
- Hodge-Operator, 72
- homogen, 53
- Homomorphismus, 12
- homotop, 8
- Homotopie Operator, 68
- Homotopie-äquivalent, 8
- Homöomorphismus, 6

- idempotente, 12
- Identifizierung, 7
- Identifizierungstopologie, 6
- immergierte Untermannigfaltigkeit, 31
- Immersion, 6, 21, 37
- induzierten Topologie, 6
- injektiv, 3

- Innere, 7
innere Multiplikation, 54
Integralkurve, 42
Integritätsbereiche, 11
Involutionen, 13
Isometrien, 10
Isomorphismus, 12

Jacobi-Identität, 40

Karte, 28
kartesische Produkt, 3
Keilprodukt, 54
Keime, 32
Kern, 13
Kette, 3
Klumpentopologie, 5
Knoten, 24
kompakt, 10
kompatibel, 28
Komplement, 7
komplexe (analytische) Lie-Gruppe, 49
komplexe Mannigfaltigkeit, 46
Kontraktion, 10
Koordinatensystem, 28
Kotangentialbündel, 34
kovariante Ableitung, 67
kritischer Punkt, 26, 37
kritischer Wert, 26, 37
Kronecker-Fluss, 45
Kurve, 7
kurze exakte, 13
Körper, 11

Laplace-Beltrami-Operator, 72
Lebesgue-Zahl, 10
Levi-Civita-Ableitung, 67
Lie-Algebra, 41
Lie-Gruppe, 45
Lie-Gruppen, 31
Lie-Homomorphismus, 50
Lie-Untergruppe, 51
linear Hülle, 12
linksinvariant, 47
lokal einfach zusammenhängend, 8
lokal euklidisch, 27
lokaler Diffeomorphismus, 37

m-Simplex, 60
mager, 7
Mannigfaltigkeit, 28
maximale Integralkurve, 43
Modul, 11
Morphismen, 14
Morsefunktion, 26, 37
Morseindex, 37

nicht degeneriert, 37
nicht entartet, 26
nirgends dicht, 7

obere Schranke, 3
Objekten, 14
offen, 5, 6
Orbit, 4
orientierbar, 58
orientiert, 62
orientierte Mannigfaltigkeiten, 59
Orientierung, 62

parakompakt, 35
periodisch, 45
Projektionen, 12
projektive Raum, 29
pull-back, 40
push-out, 40

Randorientierung, 63
Rang, 13, 21
reelle projektive Raum, 9
regulär, 18, 37
regulärer Punkt, 26
regulärer Wert, 26, 37
Repräsentation, 48
repräsentiert, 24
Richtungsableitung, 31
Riemannsche Metrik, 54
Ringe, 11

Schnitt, 4

- Schnittbasen, 64
Schnitttopologie, 5
Seiten, 60
semilokal einfach zusammenhängend, 8
Splitting, 13
Strophoide, 19
Struktur, 28
Submersion, 21, 37
Superalgebra, 55
surjektiv, 3
symmetrisch, 15
symplektischen Gruppen, 49
- Tangentialbündel, 26, 33
Tangentialraum, 23
Tensoralgebra, 53
Tensorprodukt, 52
Tensorraum, 53
topologische Mannigfaltigkeit, 27
Torsion, 67
- Umgebung, 5
universale, 9
universellen Überlagerungsraum, 9
Unterbasis, 6
Untermannigfaltigkeit, 22, 29, 31, 50
Untervektorraum, 12
Urbild, 3
- Vektorraum, 11
verwandt, 41
vollständig, 44
Vorordnung, 3
- Weg, 7
Wegzusammenhangskomponenten, 8
wegzusammenhängend, 8
wohlgeordnet, 3
- zerlegbar, 53
Zerlegung, 7
Zerlegung der Eins, 36
zusammenhängend, 8
zusammenziehbar, 9
- Überlagerung, 9